

МАТЕМАТИКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОРЫВА

шаг в инженерное образование с новыми ресурсами «Просвещения»

Зубкова Екатерина Дмитриевна, ведущий методист ГК «Просвещение», автор-разработчик методических пособий, автор и преподаватель обучающих курсов для педагогов
EZubkova@prosv.ru

МАТЕМАТИКА НА РЕЗУЛЬТАТ: новые инструменты и полезные ресурсы для школьного учителя



**Яценко Иван
Валериевич**

кандидат физико-математических наук, директор МЦНМО, научный руководитель ЦПМ, руководитель федеральной комиссии разработчиков КИМ для ЕГЭ, автор учебно-методических пособий по математике



**Высоцкий Иван
Ростиславович**

руководитель лаборатории теории вероятностей МЦНМО, заместитель председателя федеральной комиссии по разработке КИМ ЕГЭ по математике, автор учебников и учебно-методических пособий по математике

**Семёнов Андрей
Викторович**

кандидат педагогических наук, заместитель руководителя Федеральной комиссии по разработке КИМ ЕГЭ по математике



**Волчкевич Максим
Анатолевич**

Старший методист Центра Педагогического Мастерства и кафедры физ.-мат. образования МФТИ. Учитель математики в школах г. Москвы: Школа 57, «Вторая школа», «Школа ЦПМ». Лауреат конкурса «Грант Москвы», лауреат гранта фонда «Династия» в номинациях «Наставник будущих учёных» и «Учитель, воспитавший Ученика», лауреат премии Москвы в области образования, автор учебно-методических пособий по геометрии



**Пратусевич Максим
Яковлевич**

кандидат физико-математических наук, директор ФМЛ №239, г. Санкт-Петербург, Почётный работник общего образования Российской Федерации, Заслуженный учитель, автор учебно-методических пособий



**Прокофьев Александр
Александрович**

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики МИЭТ, Почетный работник сферы образования РФ, автор учебно-методических пособий по математике



**Разинкова Елена
Александровна**

учитель высшей категории ГБОУ школы № 1576, г. Москва, старший эксперт ЕГЭ, участник педагогической экспертизы учебников, автор учебно-методических пособий



**Мардахаева Елена
Львовна**

кандидат педагогических наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, педагогический дизайнер АО «Издательство «Просвещение» автор УМК «Лаборатория А. Г. Мордковича»

Выступления авторов учебников и учебных пособий

Экспертные комментарии методистов

Мастер-классы по интеграции цифровых инструментов в образовательный процесс



<https://go.prosv.ru/NejpYC>

НОВЫЙ УЧЕБНИК В ФПУ. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Математика технологического прорыва : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

Математика технологического прорыва : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»



<https://go.prosv.ru/wgCCod>

№№ ФПУ 2.1.3.5.1.1. – 2.1.3.4.1.2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Введение
§ 1. Высказывания и предикаты
§ 2. Множества и операции над ними
§ 3. Кванторы. Структура теорем
§ 4. Метод математической индукции
§ 5. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона
§ 6. Особенности множества вещественных чисел
§ 7. Мощность множеств
§ 8. Уравнения с одной переменной. Равносильность и следование ..
§ 9. Неравенства с одной переменной
§ 10. Уравнения и неравенства с модулем
§ 11. Задачи, связанные с расположением корней квадратного трёхчлена
§ 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными
§ 13. Системы линейных уравнений с числом неизвестных, большим 2
§ 14. Проценты
<i>Задачи и упражнения</i>
Глава II. Многочлены
§ 15. Понятие многочлена
§ 16. Многочлены от одной переменной. Метод неопределённых коэффициентов
§ 17. Деление многочленов с остатком
§ 18. Теорема Безу и её следствия. Совпадение формального и функционального равенства многочленов
§ 19. Многочлены с целыми коэффициентами
§ 20. Теорема Виета и симметрические многочлены
<i>Задачи и упражнения</i>
Глава III. Функция. Основные понятия
§ 21. Понятие функции
§ 22. Способы задания функции. График функции. Некоторые элементарные функции
§ 23. Некоторые свойства функций
§ 24. Композиция функций. Обратная функция
§ 25. Элементарные преобразования графиков функций
§ 26. Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности. Понятие об асимптотах
§ 27. Графическое решение уравнений и неравенств. Количество корней уравнения $f(x) = a$
<i>Задачи и упражнения</i>

Глава IV. Корень, степень, логарифм
§ 28. Корень натуральной степени
§ 29. Обобщение понятия степени
§ 30. Логарифм
<i>Задачи и упражнения</i>
Список дополнительной литературы
Предметный указатель
Глава V. Тригонометрия
§ 31. Обобщённый угол. Измерение углов в радианах и градусах. Единичная (тригонометрическая) окружность
§ 32. Синус, косинус, арксинус, арккосинус
§ 33. Тангенс, котангенс, арктангенс, арккотангенс
§ 34. Тригонометрические формулы. Метод вспомогательного аргумента
§ 35. Тригонометрические функции и их свойства
§ 36. Обратные тригонометрические функции
§ 37. Тригонометрические уравнения
<i>Задачи и упражнения</i>
Глава VI. Предел последовательности
§ 38. Понятие последовательности. Свойства последовательностей .
§ 39. Последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии
§ 40. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей
§ 41. Действия над сходящимися последовательностями. Вычисление пределов
§ 42. Предел монотонной последовательности. Число e . Комбинированные методы нахождения пределов
§ 43. Подпоследовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса ..
<i>Задачи и упражнения</i>
Глава VII. Предел и непрерывность функции
§ 44. Понятие предела функции
§ 45. Некоторые свойства пределов функции
§ 46. Вычисление предела функции в точке
§ 47. Классификация бесконечно малых функций
§ 48. Непрерывность функций в точке
§ 49. Непрерывность функций на промежутке
§ 50. Асимптоты графика функции
<i>Задачи и упражнения</i>

Глава VIII. Производная
§ 51. Определение производной
§ 52. Производные некоторых элементарных функций
§ 53. Задача о касательной. Уравнение касательной
§ 54. Приближение функции линейной функцией. Дифференциал
§ 55. Производная произведения, частного, композиции функций
§ 56. Первая и вторая производные. Производные высших порядков
<i>Задачи и упражнения</i>
Заключение
Список дополнительной литературы
Проверь себя
Ответы
Справочные материалы
Предметный указатель

Математика технологического прорыва : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

§ 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Итак, требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (a) \\ a_2x + b_2y = c_2, & (б) \end{cases}$$

где искомыми неизвестными являются x и y .

Если одно из чисел a_1 и a_2 равно нулю, то одно из уравнений системы уже является линейным уравнением с одной переменной y , которое можно решить, а найденное значение y подставить в оставшееся уравнение и найти x (мы не рассматриваем случай $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ одновременно, так как тогда система будет состоять из уравнений относительно одной переменной y)¹.

¹ Мы отдельно оговариваем случай равенства нулю a_1 или a_2 , поскольку нельзя безнаказанно умножать уравнение на нуль!

Поэтому далее рассмотрим случай $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. Умножим уравнение (а) на a_1 , а уравнение (б) на a_2 , получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2, \end{cases} \text{ откуда после вычитания из верхнего уравнения}$$

нижнего имеем $(b_1a_2 - a_1b_2)y = c_1a_2 - a_1c_2$.

Получилось линейное уравнение относительно y , наличие и число решений которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент перед y , т. е. $b_1a_2 - a_1b_2$.

1) $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$. Тогда можно найти единственное значение y , удовлетворяющее уравнению $y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$. Подставив найденное значение

y в любое исходное уравнение, получаем $x = \frac{-c_1b_2 + b_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$ (при

этом, если, например, подставлять в первое уравнение, возникает необходимость делить на $a_1 \neq 0$).

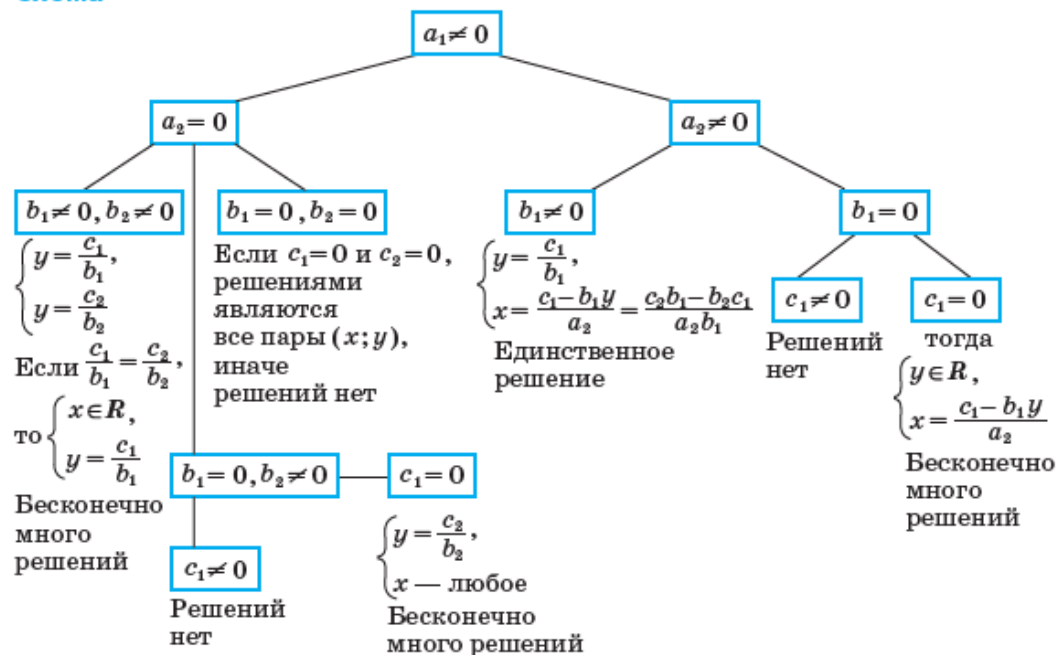
2) $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$. Тогда, если $c_1a_2 - a_1c_2 \neq 0$, то уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. Если же $c_1a_2 - a_1c_2 = 0$, то уравнение имеет своими решениями все вещественные значения y . Тогда и система имеет бесконечно много решений, ведь по каждому y может быть найден x из любого уравнения системы.

Случаи нулевых коэффициентов рассмотрены в [схеме](#) (с. 89).

§ 12. Система двух линейных уравнений

с двумя неизвестными

Схема



Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, вы-

числяемое по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (причём не все из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 равны нулю), то в случае, если хотя бы одно из чисел $c_1b_2 - c_2b_1$ и $a_1c_2 - a_2c_1$ не равно нулю, система не имеет решений. Если же оба этих числа равны нулю, то система имеет бесконечно много решений. ●

Поэтому далее рассмотрим случай $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. Умножим уравнение (а) на a_1 , а уравнение (б) на a_2 , получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2, \end{cases}$$

откуда после вычитания из верхнего уравнения

нижнего имеем $(b_1a_2 - a_1b_2)y = c_1a_2 - a_1c_2$.

Получилось линейное уравнение относительно y , наличие и число решений которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент перед y , т. е. $b_1a_2 - a_1b_2$.

1) $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$. Тогда можно найти единственное значение y ,

удовлетворяющее уравнению $y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$. Подставив найденное зна-

чение y в любое исходное уравнение, получаем $x = \frac{-c_1b_2 + b_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$ (при

этом, если, например, подставлять в первое уравнение, возникает необходимость делить на $a_1 \neq 0$).

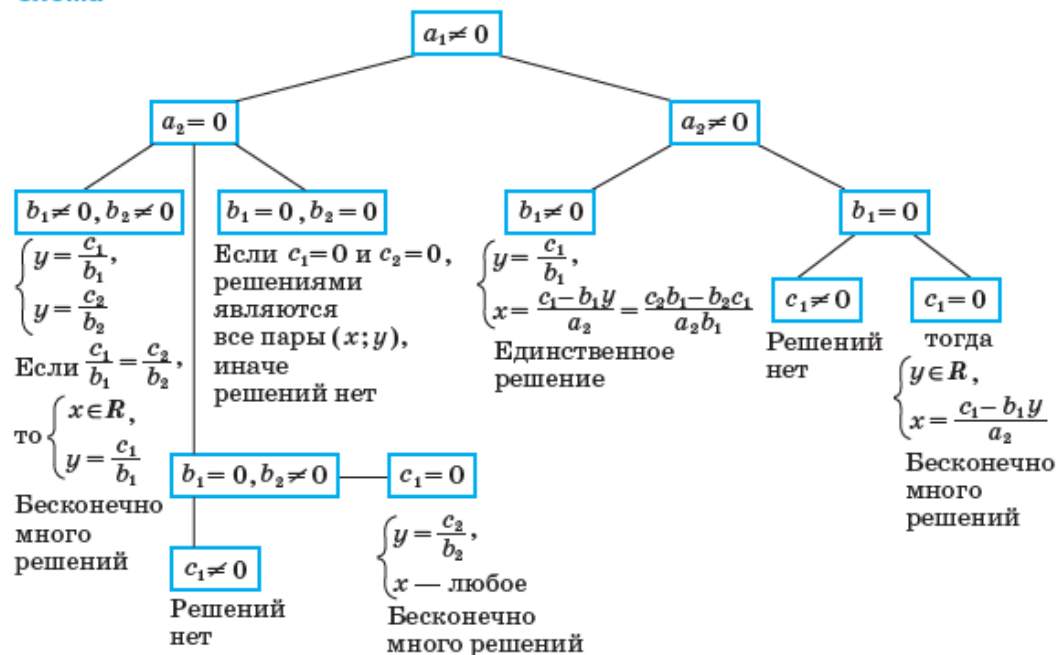
2) $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$. Тогда, если $c_1a_2 - a_1c_2 \neq 0$, то уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. Если же $c_1a_2 - a_1c_2 = 0$, то уравнение имеет своими решениями все вещественные значения y . Тогда и система имеет бесконечно много решений, ведь по каждому y может быть найден x из любого уравнения системы.

Случаи нулевых коэффициентов рассмотрены в [схеме](#) (с. 89).

§ 12. Система двух линейных уравнений

с двумя неизвестными

Схема



Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, вы-

числяемое по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (причём не все из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 равны нулю), то в случае, если хотя бы одно из чисел $c_1b_2 - c_2b_1$ и $a_1c_2 - a_2c_1$ не равно нулю, система не имеет решений. Если же оба этих числа равны нулю, то система имеет бесконечно много решений. ■

Заметим, что выражения, о которых шла речь выше, устроены схожим образом. Для таких выражений придумано специальное обозначение: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Такое выражение в этом обозначении называется *определителем второго порядка*.

Понятие определителя вводится для конечных квадратных таблиц. Порядок определителя — это число строк или столбцов в соответствующей таблице. Общее определение и правила вычисления определителя выходят за рамки нашего курса.

С помощью введённого обозначения можно переписать результат решения системы следующим образом:

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \quad (\text{эти формулы называются формулами Крамера}).$$

Если же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ и хотя бы одно из выражений $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ не равно нулю, система решений не имеет. Если $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то система имеет бесконечно много решений или не имеет их вовсе.

Пример 100. Пусть $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Найдём $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}$.

■ По определению, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta - \alpha)$. Учитывая, что $\alpha\beta = -1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, получаем $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \sqrt{5}$. Заметим, что α и β — суть корни квадратного уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. ■

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IX. Применение производной	
§ 57. Первообразная	
§ 58. Неопределённый интеграл	
§ 59. Французские теоремы	
§ 60. Исследование функции с помощью производной	
§ 61. Выпуклые функции	
§ 62. Построение эскизов графиков с помощью производной. Решение задач с помощью производной	
<i>Задачи и упражнения</i>	
Глава X. Определённый интеграл и знакомство с дифференциальными уравнениями	
§ 63. Площадь криволинейной трапеции	
§ 64. Определённый интеграл	
§ 65. Свойства определённого интеграла	
§ 66. Применение определённого интеграла	
§ 67. Дифференциальные уравнения	
<i>Задачи и упражнения</i>	
Глава XI. Комплексные числа	
§ 68. Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма записи и арифметические действия над комплексными числами	
§ 69. Комплексные числа и многочлены. Основная теорема алгебры	
§ 70. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел	
§ 71. Корень n -й степени из комплексного числа	
§ 72. Применения комплексных чисел	
<i>Задачи и упражнения</i>	
Глава XII. Целые числа	
§ 73. Деление с остатком целых чисел	
§ 74. Сравнения. Перебор остатков	
§ 75. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых чисел	
§ 76. Взаимно простые числа	
§ 77. Простые числа. Основная теорема арифметики	
<i>Задачи и упражнения</i>	
Глава XIII. Уравнения и неравенства	
§ 78. Некоторые способы решения уравнений	
§ 79. Целые рациональные и дробно-рациональные уравнения	
§ 80. Системы алгебраических уравнений и неравенств	

§ 81. Уравнения и неравенства с параметром. Аналитическое исследование	
§ 82. Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами	
§ 83. Графический метод решения уравнений и неравенств с параметрами в плоскости $(x; a)$	
§ 84. Графический метод решения уравнений и неравенств с параметрами в плоскости $(x; y)$	
§ 85. Использование свойств функций при решении уравнений с параметрами	
§ 86. Иррациональные уравнения и системы	
§ 87. Иррациональные неравенства	
§ 88. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	
§ 89. Показательные уравнения и неравенства	
§ 90. Логарифмические уравнения и неравенства	
§ 91. Тригонометрические уравнения и неравенства	
<i>Задачи и упражнения</i>	

Глава XIV. Повторение	
<i>Задачи и упражнения</i>	

Список дополнительной литературы	
Предметный указатель	

Математика технологического прорыва : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

§ 67. Дифференциальные уравнения

1. Понятие о дифференциальных уравнениях.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В разных задачах физики и математики встречаются уравнения, в которых в роли искомого неизвестного присутствуют функции. Уравнения, в которые наряду с неизвестной функцией и её аргументом входят производные искомой функции, называются *дифференциальными уравнениями*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнение вида $F(x), f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x) = 0$ называется дифференциальным уравнением порядка n .

Когда мы в предыдущих параграфах находили первообразные данной функции f , мы фактически решали простейшие дифференциальные уравнения $y' = f$, искомой неизвестной функцией в которых является y .

Пример 30. Уравнение вида $y'' + \omega^2 y = 0$, где искомой неизвестной функцией является функция $y(t)$, могло встречаться на уроках физики как уравнение гармонических колебаний с частотой ω . Добавление периодической вынуждающей силы, колеблющейся с той же частотой (и нулевым сдвигом по фазе), даёт явление резонанса, а соответствующее уравнение будет выглядеть как $y'' + \omega^2 y = A \cos \omega t$ (обратите внимание, что в это уравнение входит не только неизвестная функция y и её производные, но и t — аргумент этой функции). Рассмотренные уравнения являются уравнениями второго порядка.

Таким образом, дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка, если из производных в них входит только первая производная. Дифференциальные уравнения называются уравнениями второго порядка, если, наряду с независимой переменной, искомой функцией этой переменной, в него входят первая и вторая производные и не входят производные более высоких порядков.

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Радиоактивный распад

Известен экспериментально установленный факт, что при распаде радиоактивного вещества отношение количества атомов, распавшихся за время Δt , к общему количеству атомов не зависит от количества вещества $M(t)$ и является константой k , зависящей только от вещества и называемой вероятностью распада.

Запишем приращение количества вещества за момент времени Δt : $M(t + \Delta t) - M(t) = -kM(t)\Delta t + o(\Delta t)$ (знак «минус» отражает факт убывания количества вещества)¹. Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt , стремящемся к нулю, получим дифференциальное уравнение $M'(t) = -kM(t)$, которому должно удовлетворять количество вещества.

Рассмотрим подробнее дифференциальное уравнение, появившееся у нас в этой задаче.

ТЕОРЕМА существования и единственности решений дифференциального уравнения $y' = ky$

Решением дифференциального уравнения $y' = ky$ являются все функции вида $y = Ce^{kx}$, где C — некоторое вещественное число, и только они.

Пример 31. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству вещества. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается через 1600 лет. Какой процент первоначального запаса радия распадётся через 5600 лет?

□ Пусть $M(t)$ — количество радия в момент времени t . По доказанному выше $M(t) = Ce^{-kt}$, при этом $k = \frac{\ln 2}{T}$, где T — период полураспада радия, равный, как следует из условия, 1600 лет. Тогда $M(5600) = C \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600} \cdot 5600} = C \cdot 2^{-3,5}$ и через 5600 лет распадётся

$$\left(1 - \frac{M(5600)}{M(0)}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{C \cdot 2^{-3,5}}{C}\right) \cdot 100\% \approx 91\% \text{ радия. } \blacksquare$$

§67. Дифференциальные уравнения

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ещё один часто встречающийся в задачах тип дифференциальных уравнений — уравнения с разделяющимися переменными.

Некоторые дифференциальные уравнения можно представить в виде $f(y) \cdot y' = g(x)$. Такие уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными и могут быть решены следующим способом.

Запишем $y' = \frac{dy}{dx}$, получив уравнение $f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$. «Домножив

его на dx », получим $f(y)dy = g(x)dx$. Проинтегрировав в последнем равенстве обе части, получим $F(y) + C_1 = G(x) + C_2$, где $F(x)$ — некоторая первообразная f , а $G(x)$ — некоторая первообразная g , или, в силу произвольности констант C_1 и C_2 , $F(y) = G(x) + C$. Из последнего уравнения часто удаётся выразить функцию y в явном виде через x .

Пример 33. Решите дифференциальное уравнение $y'y^2 = x$.

□ $y'y^2 = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}y^2 = x \Leftrightarrow y^2dy = xdx$, откуда, проинтегрировав левую

и правую части, получаем $\int y^2dy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$. Отсюда получаем, что $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C}$. □

¹ Обратите внимание, что константа C в обеих частях последнего равенства хоть и обозначена одной и той же буквой, но не одинакова (в последнем выражении она вдвое больше, чем в предпоследнем), поскольку означает произвольную постоянную, принимающую все вещественные значения. Сравните такое вольное обращение с записями решений тригонометрических уравнений: $-x = \pi k$ приводит к $x = \pi k$ при $k \in \mathbb{Z}$, так как буква k означает переменную, принимающую все целые значения.

3. Гармонические колебания и примеры дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим важный пример ещё одной задачи, приводящей к дифференциальным уравнениям, на этот раз второго порядка.

Пусть грузик массы m прикреплен к концу горизонтальной пружины жёсткости k . В неподвижном положении грузик находится в начальной точке оси x , направленной вправо. Растянем эту пружину на длину x и отпустим.

□ Выведем уравнение, задающее координату грузика $x(t)$ в зависимости от времени (рис. 10.16).

Согласно закону Гука, при малом отклонении грузика на длину x на него будет действовать сила упругости $F = -kx$. По закону Ньютона произведение массы грузика m на ускорение x'' равно силе, действующей на грузик в данный момент, т. е. $F = mx'' = -kx$, откуда получаем дифференциальное уравнение, описывающее движение грузика:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad \blacksquare$$

Как уже отмечено выше, уравнение

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

называется уравнением гармонических колебаний и встречается во многих физических задачах.

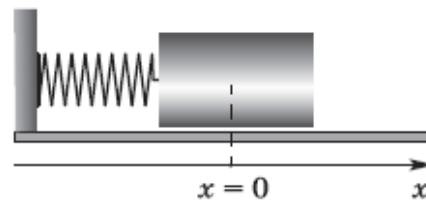


Рис. 10.16

ТЕОРЕМА

Решениями уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$ являются все функции вида $y = a \sin \omega t + b \cos \omega t$, где a и b — любые постоянные.

Математическая вертикаль : 10-11-е классы : углублённый уровень : учебник по вероятности и статистике для физико-математических классов. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.5.2.1.
Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.5.3.1.
Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.5.3.2.
Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. Часть 1: Волчкевич М.А., под ред. Яценко И.В. Часть 2: Самсонов П.И., Шестаков С.А., под ред. Яценко И.В. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.5.4.1.
Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. П. И. Самсонов, С. А. Шестаков ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.5.4.2.



ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

Предисловие

Глава I. Представление данных и описательная статистика

1. Среднее арифметическое и медиана массива данных

2. Сравнение описательных свойств среднего арифметического и медианы

3. Квартили и урезанное среднее

4. Межквартильный размах и диаграмма «ящик с усами»

5*. Среднее квадратичное, среднее гармоническое и среднее геометрическое

6*. Степенные средние и неравенство о средних

7. Дисперсия и стандартное отклонение

8. Свойства среднего арифметического и дисперсии

Глава II. Элементы теории графов

9. Графы. Цепи, циклы и деревья

10. Плоские и планарные графы

11. Степени вершин графа. Эйлеровы пути и эйлеровы графы

12*. Свойства деревьев, остовное дерево графа

13*. Эйлерова характеристика

14*. Ориентированные графы

Глава III. Случайные эксперименты и случайные события

15. Случайный эксперимент, случайные события и вероятности

16. Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями

17. Операции над событиями

18. Формула сложения вероятностей

19. Условная вероятность случайного события и правило умножения вероятностей

20. Дерево случайного эксперимента и формула полной вероятности

21. Независимые события

Глава IV. Элементы комбинаторики

22. Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал числа

23. Число сочетаний и треугольник Паскаля

24. Формула бинома Ньютона

Глава V. Серии последовательных испытаний

25. Испытания. Серия испытаний до первого успеха

26. Серия независимых испытаний Бернулли

27. Случайный выбор из конечной совокупности

Глава VI. Случайные величины и распределения

28. Случайная величина и распределение вероятностей

29. Операции над случайными величинами

30. Геометрическое распределение и биномиальное распределение

Глава VII. Математическое ожидание

31. Математическое ожидание дискретной случайной величины

32. Совместное распределение двух случайных величин

33. Независимые случайные величины

34. Свойства математического ожидания

35. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений

Глава VIII. Рассеивание случайных величин

36. Дисперсия и стандартное отклонение дискретной случайной величины

37. Свойства дисперсии и стандартного отклонения

38. Дисперсия и стандартное отклонение биномиального и геометрического распределений

Глава IX. Закон больших чисел

39. Неравенство Чебышёва

40. Закон больших чисел (теорема Чебышёва)

41. Близость частоты и вероятности. Теорема Бернулли

Глава X. Элементы математической статистики

42. Генеральная совокупность и случайная выборка

43. Оценки по выборке (выборочные оценки)

44. Выборочные оценки среднего значения и дисперсии

45*. Интервальная оценка неизвестной вероятности

46. Проверка статистических гипотез

Глава XI. Непрерывные случайные величины

47. Примеры непрерывных случайных величин

48. Функция распределения и функция плотности вероятности

49. Связь между функцией распределения и функцией плотности

50. Равномерное распределение

51. Показательное распределение

52. Нормальное распределение

53. Центральная предельная теорема. Доска Гальтона

Глава XII. Распределение Пуассона

54. Распределение Пуассона

 Важно

 Задачи

6*

Параграф повышенной сложности

120

Задание повышенной сложности

Условные обозначения

 Определение

 Используйте калькулятор

 Вопросы

Глава XIII. Измерение линейной связи между случайными величинами

55. Совместное наблюдение двух величин и ковариация

56. Свойства ковариации

57. Коэффициент корреляции случайных величин

58. Ковариация и коэффициент корреляции в статистике

59. Различие между статистической и причинно-следственной связью

60. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов

Глава XIV. Простое случайное блуждание

61*. Простое одномерное случайное блуждание

62*. Переходы в простом одномерном блуждании

Ответы

Предметный указатель

Математическая вертикаль : 10-11-е классы :
углублённый уровень : учебник по вероятности
и статистике для физико-математических
классов. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под
ред. И. В. Яценко. АО «Издательство
«Просвещение»

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

ПРИМЕР 1. Игральный кубик бросают два раза. Найдём вероятность события A «сумма выпавших очков меньше чем 6».

		Второй бросок					
		1	2	3	4	5	6
Первый бросок	1	×	×	×	×		
	2	×	×	×			
	3	×	×				
	4	×					
	5						
	6						

Рисунок 80

Элементарными событиями в этом эксперименте являются все раскладки, общее число которых равно

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 326\,880.$$

Из них нужно выбрать все возможные раскладки, при которых две девушки оказываются рядом. Конечно, это можно сделать, но задача имеет более простое решение. Нужно изменить случайный эксперимент так, чтобы множество элементарных событий стало проще. Например, можно считать, что мы знаем имена девушек. Пусть их зовут, скажем, Мария и Анна, и пусть Мария уже заняла какое-то одно место.

Решение. Пусть Мария уже села на какой-то стул. Тогда задача сводится к случайному выбору места для Анны. Элементарное событие — место, на котором окажется Анна. Все $n = 9$ оставшихся мест равновозможны, из них событию A «места Анны и Марии рядом» благоприятствует $n(A) = 2$. Значит, $P(A) = \frac{2}{9}$.

Решение. Воспользуемся таблицей элементарных событий этого эксперимента (на рисунке 80 номер строки — число, выпавшее при первом броске, номер столбца — число, выпавшее при втором броске). Выделим элементарные события, благоприятствующие событию A .

Найдём общее число элементарных событий: $n = 6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствует $n(A) = 10$ из них. Поэтому вероятность события A равна $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

ПРИМЕР 2. За круглый стол на 10 стульев по кругу случайным образом садятся 8 юношей и 2 девушки. Какова вероятность того, что девушки при случайной рассадке окажутся рядом?

Глава III. СЛУЧАЙНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

162 В группе шесть человек, среди них — Михаил и Олег. Группу случайным образом делят на 3 пары. Найдите вероятность того, что Михаил и Олег окажутся в одной паре.

163 В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

164 Случайный опыт состоит в выборе двух случайных вершин в правильном шестиугольнике. Какова вероятность события:

- «выбранные вершины являются концами одной стороны»;
- «выбранные вершины являются концами одной длинной диагонали»;
- «выбранные вершины являются концами одной короткой диагонали»?

165 В случайном эксперименте кубик бросают три раза. Найдите вероятность того, что хотя бы раз выпадет грань с числом 1, но ни разу не выпадет грань с числом 6.

166 Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе. В каждом туре игроки случайным образом разбиваются на игровые пары. Проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель выходит в следующий тур. Всего в турнире участвуют 16 игроков, все играют одинаково хорошо. Среди игроков два друга — Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

- Теория на понятном ученикам языке
- Разбор основных типов задач
- Достаточное количество разноуровневых задач для самостоятельного решения
- Подготовка к профильному ЕГЭ по математике

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА



Теорема (формула сложения вероятностей). Пусть A и B — произвольные события в случайном эксперименте.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Прежде чем выводить формулу, поясним её смысл, который хорошо виден на рисунке 83. Чтобы найти вероятность объединения $A \cup B$, нужно учесть все элементарные события из события A (показаны буквами a и c) и все элементарные события из B (b и c). При этом общие элементарные события (c) будут учтены дважды, поэтому нужно вычесть их вероятности, то есть вероятность пересечения $A \cap B$.

Доказательство. Запишем события перечислением элементарных исходов. Пусть исходы a_k принадлежат только A (но не B), исходы b_k принадлежат только B , а исходы c_k принадлежат обоим событиям, то есть событию $A \cap B$. Тогда можно записать

$$A = \{a_1, a_2, \dots, c_1, c_2, \dots\} \text{ и } B = \{b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots\} —$$

количество элементов может быть конечным или бесконечным. Следовательно,

...



Формула сложения вероятностей для несовместных событий. Если события A и B несовместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Эта формула верна не только для двух, но и для произвольного количества *попарно несовместных* событий. Попарная несовместность означает, что несовместны любые два из этих событий.

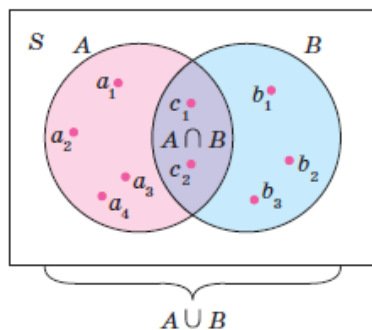


Рисунок 83. Иллюстрация к теореме

Глава III. СЛУЧАЙНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ПРИМЕР 2. В торговом центре установлены два одинаковых кофейных автомата. К концу дня кофе в каждом отдельном автомате может закончиться с вероятностью 0,2. Вероятность того, что в обоих автоматах закончится кофе, равна 0,08. Какова вероятность того, что к концу очередного дня кофе закончится только в одном из двух автоматов?

РЕШЕНИЕ. Представим событие A «кофе закончится в первом автомате» в виде объединения двух несовместных событий:

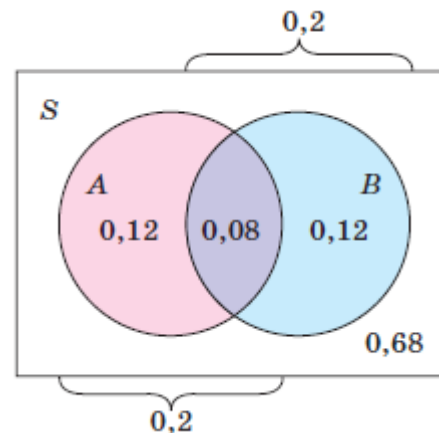
$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B).$$

Нужно найти вероятность события $A \cap \bar{B}$ «кофе закончится только в первом автомате». Второе событие $A \cap B$ состоит в том, что кофе закончится в обоих автоматах. Поскольку эти события несовместны,

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B), \text{ то есть } 0,2 = P(A \cap \bar{B}) + 0,08, \\ \text{откуда } P(A \cap \bar{B}) = 0,12.$$

Мы нашли вероятность события «кофе закончится только в первом автомате». В силу симметрии вероятность события «кофе закончится только во втором автомате» тоже равна 0,12, и эти события несовместны.

Поэтому их объединение «кофе закончится только в одном из автоматов» имеет вероятность $0,12 + 0,12 = 0,24$.



Вписав вероятности во все четыре области, легко найти вероятность любой комбинации событий

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение

Глава 1. Повторение курса алгебры 7–9 классов

- §1. Рациональные числа
- §2. Текстовые задачи на проценты и доли
- §3. Действительные числа
- §4. Приближённые вычисления
- §5. Множества
- §6. Выражения с переменными
- §7. Дробно-рациональные уравнения и неравенства
- §8. Текстовые задачи

Глава 2. Функции

- §9. Свойства функций
- §10. Линейная функция
- §11. Квадратичная функция
- §12. Дробно-рациональная функция
- §13. Преобразования графиков*
- §14. Композиция функций*

Глава 3. Степени и корни

- §15. Степень с целым показателем
- §16. Корень n -й степени
- §17. Степень с рациональным показателем
- §18. Иррациональные уравнения и неравенства
- §19. Уравнения и неравенства со знаком модуля

Глава 4. Числовая окружность и тригонометрия

- §20. Числовая окружность
- §21. Синус и косинус
- §22. Тангенс и котангенс
- §23. Преобразование тригонометрических выражений

Глава 5. Тригонометрические функции и уравнения

- §24. Тригонометрические функции и их графики
- §25. Обратные тригонометрические функции
- §26. Простейшие тригонометрические уравнения
- §27. Методы решения тригонометрических уравнений

Задания для повторения

Предметный указатель

Глава 6. Тригонометрические выражения

- §28. Формулы суммы и разности аргументов
- §29. Формулы двойного угла
- §30. Формулы понижения степени
- §31. Преобразование и вычисление значений тригонометрических выражений
- §32. Преобразование суммы и произведения тригонометрических функций
- §33. Решение тригонометрических уравнений

Глава 7. Логарифмы

- §34. Показательные уравнения и неравенства
- §35. Определение логарифма
- §36. Свойства логарифмов
- §37. Логарифмические уравнения и неравенства

Глава 8. Производная

- §38. Непрерывные функции
- §39. Понятие производной функции
- §40. Правила дифференцирования
- §41. Вторая производная
- §42. Дифференцирование сложной и обратной функций
- §43. Уравнение касательной к графику функции

Глава 9. Последовательности

- §44. Числовые последовательности
- §45. Арифметическая прогрессия
- §46. Геометрическая прогрессия
- §47. Метод математической индукции
- §48. Прогрессии в задачах экономического содержания

Глава 10. Матрицы

- §49. Системы линейных уравнений
- §50. Матрицы
- §51. Определители

Предметный указатель



Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Глава 10. Матрицы

§49. Системы линейных уравнений

§50. Матрицы

§51. Определители

ПРИМЕР 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 15x + 36y - 87z = 30, \\ 12x + 29y - 70z = 24, \\ 1,1x + 3,2y - 6,7z = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Сначала упростим первое уравнение системы, разделив его на 3, а также избавимся от дробных коэффициентов в третьем уравнении системы, умножив его на 10:

$$\begin{cases} 5x + 12y - 29z = 10, \\ 12x + 29y - 70z = 24, \\ 11x + 32y - 67z = 30. \end{cases}$$

Вычтем из второго и третьего уравнений первое, умноженное на 2, чтобы уменьшить коэффициенты:

$$\begin{cases} 5x + 12y - 29z = 10, \\ 2x + 5y - 12z = 4, \\ x + 8y - 9z = 10. \end{cases}$$

Теперь вычтем из первого уравнения удвоенное второе уравнение:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 2, \\ 2x + 5y - 12z = 4, \\ x + 8y - 9z = 10. \end{cases}$$

Избавимся от переменной x во втором и третьем уравнениях:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 2, \\ y - 2z = 0, \\ 6y - 4z = 8. \end{cases}$$

Теперь избавимся от переменной y в первом и третьем уравнениях:

$$\begin{cases} x - z = 2, \\ y - 2z = 0, \\ 8z = 8. \end{cases}$$

Разделим третье уравнение системы на 8 и избавимся от переменной z в первом и втором уравнениях:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2; 1).

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Глава 10. Матрицы

§49. Системы линейных уравнений

§50. Матрицы

§51. Определители

Для решения системы уравнений использовались равносильные преобразования: умножение уравнений системы на ненулевые числа, а также прибавление к одному уравнению системы другого, умноженного на некоторое число. При этом переменная x каждый раз оказывалась под x , y под y , а z под z . Такая запись довольно удобна, но можно её ещё упростить, не записывая систему полностью, а вместо этого оставить только таблицу, содержащую коэффициенты перед переменными и числа в правых частях уравнения. Например, запись a_{mn} — это коэффициент при переменной в m -й строке и в n -м столбике. Такие таблицы называются *матрицами*. Матрицы обладают многими интересными свойствами и часто возникают в математике и её разнообразных приложениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрицей* называется таблица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Числа в этой таблице называются *элементами* матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим систему n линейных уравнений с m переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей системы линейных уравнений*. Если отбросить последний столбец этой матрицы, то получится матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей коэффициентов системы линейных уравнений* или просто *матрицей системы линейных уравнений*.

Например, расширенной матрицей системы линейных уравнений из примера 1 является матрица

$$\begin{pmatrix} 15 & 36 & -87 & 30 \\ 12 & 29 & -70 & 24 \\ 1,1 & 3,2 & -6,7 & 3 \end{pmatrix},$$

а её матрицей коэффициентов —

$$\begin{pmatrix} 15 & 36 & -87 \\ 12 & 29 & -70 \\ 1,1 & 3,2 & -6,7 \end{pmatrix}.$$

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Глава 10. Матрицы

§49. Системы линейных уравнений

§50. Матрицы

§51. Определители

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4, \\ 3x - 4y + 2z = 21, \\ 7x + 8y - 6z = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 21 \\ 7 & 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, а из третьей строки утроенную первую строку:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & -7 & 7 & 17 \\ 1 & -1 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем из второй строки третью, а из первой строки удвоенную третью строку:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -23 & 26 \\ 0 & -6 & -2 & 28 \\ 1 & -1 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами первую и третью строки, а вторую разделим на -2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & -14 \\ 0 & 5 & -23 & 26 \end{pmatrix}.$$

Продолжим преобразования, вычитая из второй строки третью, затем из третьей удвоенную вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & -14 \\ 0 & 2 & -24 & 40 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 25 & -54 \\ 0 & 2 & -24 & 40 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 25 & -54 \\ 0 & 0 & -74 & 148 \end{pmatrix}.$$

Разделим последнюю строку на -74 , а затем вычтем её, умноженную на 9 , из первой строки, а умноженную на 25 , из второй строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим вторую строку к первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -4, \\ z = -2, \end{cases}$$

решением которой является тройка чисел $(3; -4; -2)$.

Ответ: $(3; -4; -2)$.

Глава 10. Матрицы

§ 49.	Системы линейных уравнений
§ 50.	Матрицы
§ 51.	Определители

Для решения системы линейных уравнений можно записать её расширенную матрицу. Затем с её строками можно осуществлять следующие действия, называемые *элементарными преобразованиями*:

- 1) прибавить к одной строке другую, умноженную на число;
- 2) умножить строку на ненулевое число;
- 3) поменять местами две строки.

При помощи таких преобразований можно получить матрицу, которая соответствует системе линейных уравнений, для которой множество решений находится явно.

8 разноуровневых
упражнений
для закрепления

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Определителем* квадратной матрицы 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Для обозначения определителя матрицы вместо круглых скобок используются прямые, похожие на знак модуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ПРИМЕР 1. Найдите определитель матрицы $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся определением и формулой косинуса двойного угла:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$$

Ответ: $\cos 2\alpha$.

Сформулируем полученный результат о решении системы линейных уравнений в общем виде, используя определители. Рассмотрим матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & b \\ n & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & m \\ c & n \end{pmatrix}.$$

Первая из этих матриц является матрицей коэффициентов системы линейных уравнений, а вторая и третья получаются из неё, если заменить первый или второй столбец на столбец, состоящий из чисел в правых частях уравнений. Обозначим определители этих матриц через Δ , Δ_x , Δ_y . Тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = dm - bn, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm.$$

Глава 10. Матрицы

§49. Системы линейных уравнений

§50. Матрицы

§51. Определители

Таким образом, утверждение о решении системы линейных уравнений можно сформулировать следующим образом.

Если $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = m, \\ cx + dy = n \end{cases}$$

имеет единственное решение $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$.

Аналогичное утверждение верно для систем n линейных уравнений с n переменными, где n — произвольное натуральное число, но чтобы его сформулировать, нужно определить, что такое определитель квадратной матрицы $n \times n$.

Разберёмся, что происходит в случае, когда $\Delta = ad - bc = 0$. Такое равенство возможно тогда и только тогда, когда векторы с координатами $(a; b)$ и $(c; d)$ коллинеарны, то есть либо среди них есть нулевой вектор, либо один из них получается из другого умножением на ненулевое число. В первом случае уравнения системы задают пару параллельных или совпадающих прямых, поэтому если векторы $(a; b; m)$ и $(c; d; n)$ коллинеарны, то система имеет бесконечно много решений, а иначе не имеет решений.

Если среди векторов $(a; b)$ и $(c; d)$ есть нулевой, то одно из уравнений системы имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = p$. При $p \neq 0$ это уравнение не имеет решений, а значит, система тоже не имеет решений. При $p = 0$ любая пара чисел является решением уравнения $0 \cdot x + 0 \cdot y = p$. Таким образом, система равносильна второму уравнению системы и либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

Если $\Delta = 0$, то система линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + by = m, \\ cx + dy = n \end{cases}$$

либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

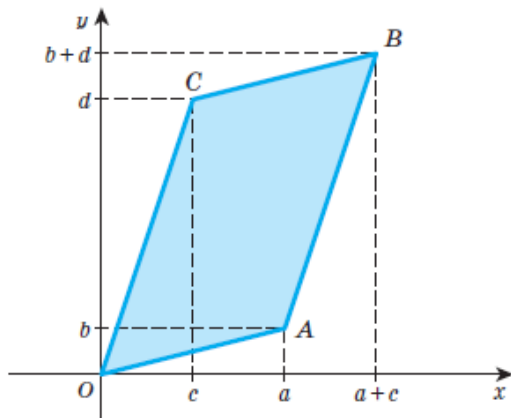
Геометрический смысл определителя 2×2

Рассмотрим на плоскости векторы $(a; b)$ и $(c; d)$. Эти векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

равен 0. На самом деле числовое значение определителя имеет геометрический смысл.

Рассмотрим параллелограмм с вершинами $O(0; 0)$, $A(a; b)$, $B(a + c; b + d)$, $C(c; d)$ (рис. 192).



Глава 10. Матрицы

§49. Системы линейных уравнений

§50. Матрицы

§51. Определители

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ. Площадь параллелограмма $ABCD$, вершины которого имеют координаты $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $(x_C; y_C)$, $(x_D; y_D)$, равна модулю определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1170. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

1171. Решите при всех значениях параметра a систему уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

1172. Вычислите определитель:

а) $\begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 21 & 31 \\ 20 & 30 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 233 & 377 \\ 144 & 233 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 41 & 17 \\ 29 & 12 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 184 & 12 \\ -552 & -36 \end{vmatrix}$.

1173. На координатной плоскости отмечены точки $A(-1; 1)$, $B(1; 2)$, $C(3; 7)$ и $D(1; 6)$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение

Глава 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности

- §1. Равносильные преобразования
- §2. Способы решения уравнений и неравенств
- §3. Корень n -й степени
- §4. Иррациональные уравнения и неравенства
- §5. Степень с действительным показателем
- §6. Показательные уравнения и неравенства
- §7. Логарифмы
- §8. Логарифмические уравнения и неравенства

Глава 2. Тригонометрия

- §9. Простейшие тригонометрические уравнения
- §10. Простейшие тригонометрические неравенства, их системы
купности
- §11. Преобразование тригонометрических выражений
- §12. Тригонометрические уравнения
- §13. Тригонометрические неравенства

Глава 3. Комплексные числа

- §14. Определение комплексного числа
- §15. Тригонометрическая форма записи комплексного числа
- §16. Решение уравнений в комплексных числах
- §17. Функции комплексной переменной

Глава 4. Исследование функции

- §18. Связь между свойствами функции и её производной
- §19. Правила дифференцирования
- §20. Исследование функций
- §21. Построение графиков функций
- §22. Задачи оптимизации

Предметный указатель

Глава 5. Первообразная и интеграл

- §23. Первообразная
- §24. Определённый интеграл
- §25. Вычисление площади и объёма с помощью интеграла
- §26. Дифференциальные уравнения*

Глава 6. Текстовые задачи

- §27. Прикладные задачи
- §28. Текстовые задачи
- §29. Арифметическая прогрессия в экономических задачах
- §30. Геометрическая прогрессия в экономических задачах
- §31. Другие экономические задачи

Глава 7. Целые числа

- §32. Делимость целых чисел
- §33. Десятичная запись числа
- §34. Признаки делимости
- §35. Основная теорема арифметики
- §36. Деление с остатком
- §37. Методы решения задач
- §38. Решение задач

Глава 8. Графический метод

- §39. Множества на координатной плоскости
- §40. Решение уравнений, неравенств и систем графическим способом

Глава 9. Задачи с параметрами

- §41. Линейные уравнения и неравенства с параметрами
- §42. Квадратный трёхчлен в задачах с параметрами
- §43. Рациональные уравнения и неравенства с параметрами
- §44. Системы уравнений с параметрами
- §45. Замена переменной в задачах с параметрами
- §46. Графические способы решения задач с параметрами
- §47. Применение свойств функций в задачах с параметрами
- §48. Симметрия в задачах с параметрами

Предметный указатель



Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Прикладные задачи

ПРИМЕР 1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 25$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм?

РЕШЕНИЕ. Выразим переменную t из формулы $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$:

$$l(t) = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t;$$

$$t = \frac{l(t) - l_0}{l_0 \cdot \alpha}.$$

Подставив в полученную формулу данные из условия задачи $l(t) - l_0 = 9$ мм = $9 \cdot 10^{-3}$ м, $l_0 = 25$ м, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$, получаем $t = 30^\circ\text{C}$. Таким образом, рельс удлинится на 9 мм при $t = 30^\circ\text{C}$.

Ответ: 30°C .

11 примеров с разбором

30 упражнений для самостоятельного решения

1. Задачи на движение
2. Задачи на движение по воде
3. Задачи на работу и производительность
4. Задачи на растворы и сплавы

Текстовые задачи

ПРИМЕР 13. Смешав 50-процентный и 70-процентный растворы кислоты и добавив 20 кг чистой воды, получили 46-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 20 кг воды добавили 20 кг 60-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 58-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 50-процентного раствора использовали для получения смеси?

РЕШЕНИЕ. Пусть массы растворов кислоты равны m_1 кг и m_2 кг соответственно. Если смешать эти растворы и добавить 20 кг воды, то получится раствор массой $(m_1 + m_2 + 20)$ кг, содержащий $(0,5m_1 + 0,7m_2)$ кг кислоты. Учитывая, что полученный раствор содержит 46 % кислоты, составим уравнение:

$$\frac{0,5m_1 + 0,7m_2}{m_1 + m_2 + 20} = 0,46; \quad 6m_2 = 230 - m_1.$$

Раствор, получающийся при смешивании изначальных растворов и 20 кг 60-процентного раствора, содержит $(0,5m_1 + 0,7m_2 + 0,6 \cdot 20)$ кг кислоты и имеет массу $(m_1 + m_2 + 20)$ кг. Учитывая, что полученный раствор содержит 58 % кислоты, составим уравнение:

$$\frac{0,5m_1 + 0,7m_2 + 0,6 \cdot 20}{m_1 + m_2 + 20} = 0,58; \quad 6m_2 = 4m_1 - 20.$$

Массу первого раствора находим из уравнения:

$$230 - m_1 = 4m_1 - 20; \quad m_1 = 50.$$

Таким образом, при смешивании использовали 50 кг 50-процентного раствора кислоты.

Ответ: 50 кг.

13 задач с разбором

40 задач для самостоятельного решения

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Арифметическая прогрессия
в экономических задачах

ПРИМЕР 4. В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на сумму 1700 тыс. рублей на 14 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом;
- в июле каждого года с 2031-го по 2043-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- в июле 2043 года долг должен составить 400 тыс. рублей;
- в июле 2044 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму платежей после полного погашения кредита.

РЕШЕНИЕ. По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$1700; 1600; 1500; \dots; 500; 400; 0.$

Общая сумма платежей состоит из выплат, уменьшающих исходный долг, которые составляют 13 раз по 100 тыс. рублей и финальной выплаты 400 тыс. рублей, и выплат по процентам.

По условию в январе долг (в тыс. рублей) возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего года. Тогда выплаты по процентам будут следующими:

$\frac{8}{100} \cdot 1700; \frac{8}{100} \cdot 1600; \frac{8}{100} \cdot 1500; \dots; \frac{8}{100} \cdot 500; \frac{8}{100} \cdot 400.$

Сумма выплат по процентам равна $\frac{8}{100} \cdot \frac{14}{2} \cdot (1700 + 400) = 1176$ тыс. рублей. Таким образом, общая сумма платежей равна $1700 + 1176 = 2876$ тыс. рублей.

Ответ: 2876 тыс. рублей.

6 задач с разбором

16 задач для самостоятельного решения

Геометрическая прогрессия
в экономических задачах

ПРИМЕР 5. В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на сумму 500 тыс. рублей на три года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом;
- платежи в 2031 и 2032 годах должны быть равными;
- к июлю 2033 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько рублей будет выплачено банку в 2031 году, если известно, что общая сумма платежей после полного погашения кредита составит 603,5 тыс. рублей?

РЕШЕНИЕ. Пусть в 2031 и 2032 годах платежи составят по X тыс. рублей. Составим таблицу.

Год	Долг в январе (в тыс. рублей)	Платёж (в тыс. рублей)	Долг в июле (в тыс. рублей)
2030			500
2031	550	X	$550 - X$
2032	$605 - 1,1X$	X	$605 - 2,1X$
2033	$665,5 - 2,31X$	$665,5 - 2,31X$	0

Таким образом, общая сумма платежей составит

$X + X + (665,5 - 2,31X) = 665,5 - 0,31X = 603,5$ тыс. рублей,

откуда получаем, что $X = 200$. Значит, в 2031 году банку будет выплачено 200 тыс. рублей.

Ответ: 200 тыс. рублей.

6 задач с разбором

14 задач для самостоятельного решения

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Другие экономические задачи

ПРИМЕР 1. В начале 2030 года планируется взять кредит в банке на сумму 450 тыс. рублей на два года. Условия его возврата таковы:
— в середине года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с началом текущего года;
— в конце каждого года необходимо выплатить часть долга одним платежом;
— к началу 2032 года долг должен быть выплачен полностью.
Найдите r , если известно, что в 2030 году платёж составит 290 тыс. рублей, а в 2031 году платёж составит 300 тыс. рублей.

РЕШЕНИЕ. Введём переменную $k = 1 + \frac{r}{100}$.
По условию долг (в тыс. рублей) на начало года должен выглядеть следующим образом:
 $450; 450k - 290; 450k^2 - 290k - 300$.
К началу 2032 года долг выплачен полностью, значит, $450k^2 - 290k - 300 = 0$.
Корнями получившегося уравнения являются числа $-\frac{5}{9}$ и $\frac{6}{5}$. Число $k = 1 + \frac{r}{100}$ должно быть положительным. Таким образом, $r = 100 \cdot \left(\frac{6}{5} - 1\right) = 20$.
Ответ: 20.

ПРИМЕР 4. В начале 2030 года планируется открыть вклад в банке на сумму 10 000 рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года. В начале 2032 и 2033 годов планируется пополнять вклад на 2000 рублей. Найдите размер вклада по состоянию на начало 2034 года.

РЕШЕНИЕ. Размер вклада по состоянию на начало и конец года должен увеличиваться в соответствии с таблицей.

Год	Вклад в начале года (в рублях)	Пополнение (в рублях)	Вклад в конце года (в рублях)
2030	10 000		11 000
2031	11 000		12 100
2032	12 100	2000	15 510
2033	15 510	2000	19 261

Таким образом, в начале 2034 года вклад составит 19 261 рубль.
Ответ: 19 261 рубль.

6 задач с разбором
16 задач для самостоятельного решения

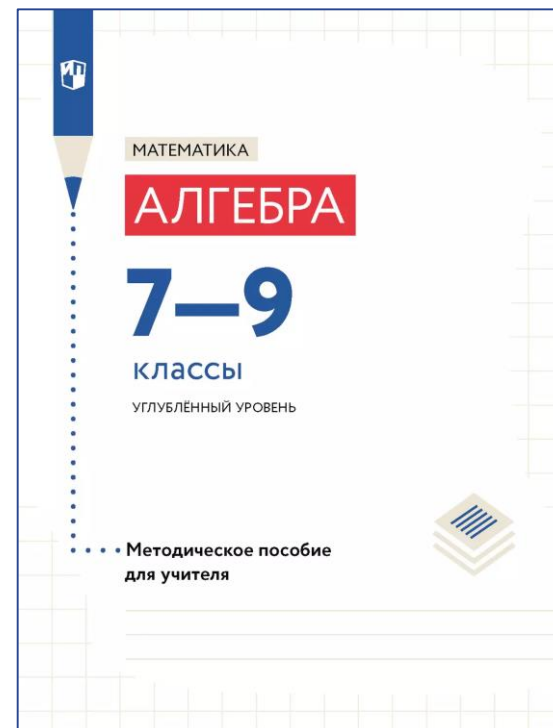
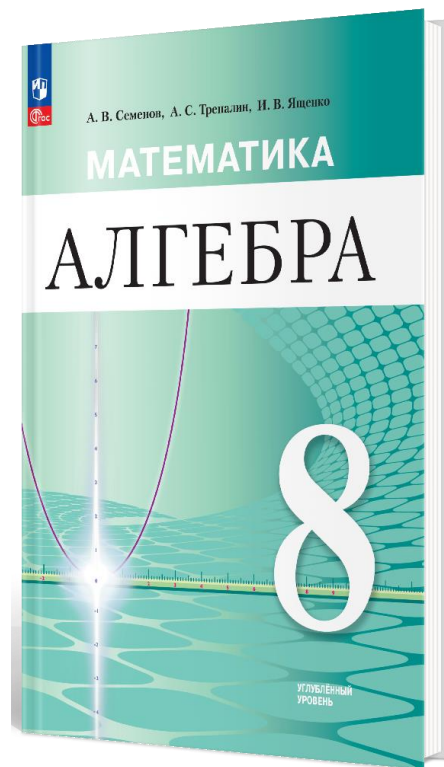
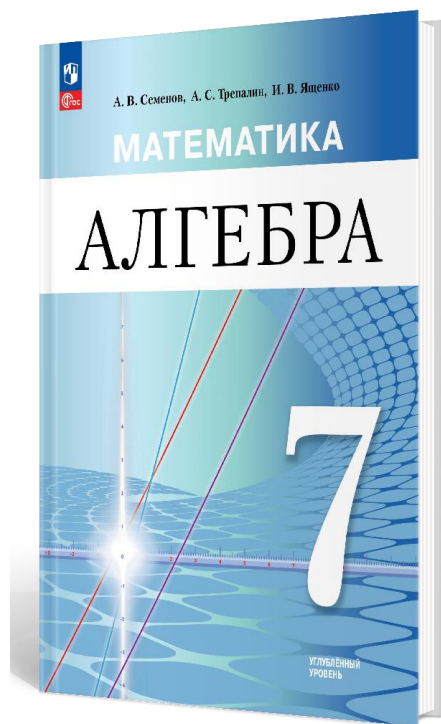
Вероятность и статистика : 7 - 9е классы : углублённый уровень : учебник : в 2 частях. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»



<https://go.prosv.ru/GGtHTR>

№ ФПУ 2.1.2.4.3.1.
№ строки 1052

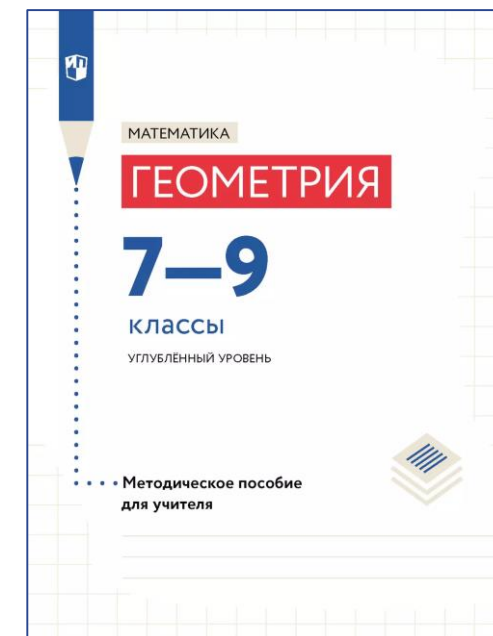
АЛГЕБРА 7 - 9. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ



<https://go.prosv.ru/t47eME>



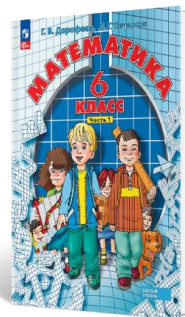
ГЕОМЕТРИЯ 7 - 9. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ



<https://go.prosv.ru/6adc4a>



Класс	Предмет/ учебный курс	Наименование учебника	Номер в ФПУ
5	Математика	Математика: 5-й класс: углублённый уровень: учебник: в 2 частях. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	2.1.2.4.1.1.
6	Математика	Математика: 6-й класс: углублённый уровень: учебник: в 3 частях. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	2.1.2.4.1.2.
7	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 7-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.2.1.
8	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 8-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.2.2.
9	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 9-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.2.3.



УЧЕБНИКИ И ТЕТРАДИ С ЦИФРОВЫМИ ПОМОЩНИКАМИ

«МУЛЬТИБУК» – учебники
с цифровым помощником

+30%

учеников 9-х классов
выбрали естественно-
научный профиль
обучения¹



- ✓ Математика
- ✓ Физика
- ✓ Химия
- ✓ География
- ✓ Биология



84%

педагогов высоко оценили
преимущества цифрового
помощника¹



доступно
в универсальной
библиотеке ЦОК²



«РЕПЕТИГР» – умные тетради
с цифровым помощником для 5–6 классов

Объясняет сложные
моменты, **мотивирует**
и **учит** ребёнка
самостоятельности



- ✓ История
- ✓ Русский язык
- ✓ Математика
- ✓ Английский язык
- ✓ География
- ✓ Биология

80%

учеников отмечают,
что стали делать
уроки без помощи
родителей³



92%

учеников, написали итоговые
работы лучше тех, кто делал
уроки без него



ПОМОЩЬ ПЕДАГОГУ В РЕШЕНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

 **УЧИТЕЛЬ.КЛАБ** ВЕБИНАРЫ УЧИМСЯ ДЛЯ ЖИЗНИ ? Войти ⚙️

Форум «Классный подход»
Платформа для профессионального роста, обмена идеями и вдохновения

[Подробнее](#)



Проект «ПроАктив: учусь и делюсь»

Сообщество, где собираются педагоги, которым важно расти, обмениваться идеями и чувствовать поддержку коллег.

[Принять участие](#) [Поделиться](#)



Официальный интернет-ресурс
издательства для методической
поддержки педагогов

- ✓ Конференции и обучение
- ✓ Всероссийские проекты
- ✓ Методические мастерские
- ✓ Полезные материалы



Сообщество проактивных
педагогов

- ✓ Профессиональный рост
- ✓ Наставничество
- ✓ Самореализация
- ✓ Лучшие практики
- ✓ Общественное признание

подать заявку
на proaktiv@prosv.ru



Всероссийский августовский онлайн-педсовет

25 августа 2026



Всероссийский августовский онлайн-педсовет

От мотивации — к успеху:
учительские практики и приёмы
поддержки учащихся

Посмотреть программу ↗

Рассказать коллеге ➦



<https://go.prosv.ru/XWspkn>

- ✓ Разговор с главным редактором
- ✓ Профильное обучение и предпрофильная подготовка
- ✓ Умные сервисы в школьном образовании
- ✓ Цифровое пространство учителя
- ✓ Игра в школе и дома: как увлечь и научить
- ✓ Семья и школа: диалог, который рождает мотивацию

Приглашаем родителей и педагогов обсудить конкретные инструменты, которые помогают удерживать внимание школьников, возвращать их интерес к учёбе и избегать выгорания на рутинных задачах.

Каждый трек — это взгляд с разных сторон на одну и ту же задачу :

КАК ПОМОЧЬ РЕБЁНКУ ЗАХОТЕТЬ УЧИТЬСЯ

Контакты



<https://prosv.ru>
prosv@prosv.ru



Канал в мессенджере «Макс»
«Просвещение. Педагоги»