

# Методические материалы по обобщению и систематизации знаний по курсу «Вероятность и статистика» для 10–11 классов

Пошаговые сценарии уроков, диагностические работы

К комплекту дидактических материалов  
по курсу «Вероятность и статистика»  
для 10–11 классов (углубленный уровень)



УУД 372.851  
ББК 74.262.21  
А

Министерство образования и науки Алтайского края  
КАУ ДПО «Алтайский институт развития образования  
имени Адриана Митрофановича Топорова»

**Методические материалы по обобщению и систематизации знаний по курсу «Вероятность и статистика» для 10–11 классов: пошаговые сценарии уроков, диагностические работы / Р.Э. Чепкасов. – Барнаул: КАУ ДПО «АИРО имени А.М. Топорова», 2026. – 97 с.**

Пособие представляет собой вторую часть комплекта материалов по курсу «Вероятность и статистика» для 10–11 классов. В издании представлены методические материалы к урокам обобщения и систематизации знаний для 10–11 классов, привязанным к поурочному планированию федеральной рабочей программы, а также диагностические работы для 10, 11 классов. Первая часть комплекта содержат дидактические материалы к урокам для 10-11 классов. Пособие адресовано учителям математики, методистам и специалистам в области математического образования.

© КАУ ДПО «АИРО имени А.М. Топорова», 2026

© Чепкасов Р.Э.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....                                                                                                                        | 4  |
| Часть I. СЦЕНАРИИ УРОКОВ ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ.....                                                                                 | 6  |
| 10 класс. Урок 32. Обобщение и систематизация знаний.....                                                                                | 9  |
| 10 класс. Урок 34. Обобщение и систематизация знаний.....                                                                                | 17 |
| 11 класс. Урок 24. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм, описательная статистика .....                                       | 23 |
| 11 класс. Урок 25. Опыты с равновероятными элементарными событиями.....                                                                  | 30 |
| 11 класс. Урок 26. Вычисление вероятностей событий с применением формул .....                                                            | 36 |
| 11 класс. Урок 27. Вычисление вероятностей событий с применением графических методов: координатная прямая, дерево, диаграмма Эйлера..... | 41 |
| 11 класс. Урок 28. Случайные величины и распределения .....                                                                              | 47 |
| 11 класс. Урок 29-30. Математическое ожидание случайной величины .....                                                                   | 54 |
| 11 класс. Урок 32. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов .....                                      | 59 |
| 11 класс. Урок 33. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов .....                                      | 65 |
| 11 класс. Урок 34. Случайные величины и распределения. Математическое ожидание случайной величины .....                                  | 70 |
| Часть II. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ.....                                                                                                    | 78 |
| 10 класс. Диагностическая работа.....                                                                                                    | 80 |
| 11 класс. Диагностическая работа.....                                                                                                    | 88 |
| ПОСЛЕСЛОВИЕ.....                                                                                                                         | 95 |

# ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Перед вами методическое пособие, которое адресовано учителям математики, работающим по курсу «Вероятность и статистика» в 10–11 классах. Оно является логическим продолжением комплекта дидактических материалов, но имеет принципиально иное назначение.

Если сборник заданий – это инструмент для организации систематической домашней и классной работы ученика, то данное пособие – это инструмент для организации деятельности учителя по **обобщению и систематизации** знаний учащихся.

Курс «Вероятность и статистика» имеет свою специфику: понятия в нем существуют не в линейной последовательности, а в сложной взаимосвязи друг с другом. Вероятность, частота, случайная величина, математическое ожидание, закон больших чисел – эти понятия нельзя освоить по отдельности, они осмысливаются только в системе. Именно поэтому обобщение и систематизация являются не просто этапом повторения, а ключевой формой работы, без которой знания остаются разрозненными и формальными.

В пособии представлены пошаговые сценарии уроков обобщения и систематизации для каждого класса. Они построены таким образом, чтобы помочь учителю организовать работу на уроке: от актуализации изученного материала до рефлексии и диагностики.

Основное содержание пособия – пошаговые сценарии уроков обобщения и систематизации. В них, среди прочего, используются задания особого типа – обобщающие конструкторы (на аналогии, на перевод, на границы применимости, на синтез), которые вплетены в ткань урока и служат инструментом установления связей между разными темами курса.

В конце пособия представлен отдельный блок диагностических работ, направленных на проверку не столько знания отдельных формул, сколько способности учащихся устанавливать связи между разными темами курса.

## **Как использовать это пособие**

Пособие не является жесткой инструкцией. Вы можете использовать предложенные сценарии полностью, адаптировать их под свой класс или брать отдельные элементы. Главное – цель: помочь ученикам увидеть курс не как набор разрозненных тем, а как целостную систему, в которой каждое понятие занимает свое место и связано с другими.

Важно понимать: уроки обобщения и систематизации, представленные в пособии, не обязательно проводить строго в конце учебного года. Их логика и структура позволяют использовать их в различных образовательных ситуациях:

- В конце изучения крупной темы – как способ собрать разрозненные понятия в систему.
- В начале учебного года – как актуализацию знаний, полученных в предыдущем классе.
- При подготовке к контрольным работам – как инструмент диагностики и систематизации.
- В рамках внеурочной деятельности или элективных курсов – для углублённого повторения.
- Выборочно – отдельные сценарии или их фрагменты могут быть встроены в текущие уроки для установления межтематических связей.

Учитель самостоятельно определяет, когда и в каком объёме использовать предложенные материалы. Данное пособие предлагает инструментарий, который можно адаптировать под логику конкретного класса, уровень подготовки учащихся и доступное учебное время.

**Перед началом работы с пособием рекомендуется:**

- Познакомиться со всем содержанием, чтобы иметь целостное представление о материале.
- Оценить, какие задания и сюжеты доступны конкретному классу с учетом его математической подготовки и возрастных особенностей.
- При необходимости сократить или упростить материал – гибкость заложена в саму структуру пособия.

# Часть I. СЦЕНАРИИ УРОКОВ ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ

---

## Общая структура уроков обобщения и систематизации знаний

Уроки обобщения и систематизации в данном пособии построены по единой логике, которая отличает их от обычных уроков повторения. Если на уроке повторения учитель, как правило, возвращается к уже изученному материалу и закрепляет его на новых примерах, то урок обобщения ставит перед собой иную цель – **установление связей между изученными понятиями** и выстраивание их в целостную систему.

Каждый сценарий включает следующие этапы:

**Актуализация.** Учитель вместе с учащимися восстанавливает в памяти изученные понятия и способы действия, фиксируя их на доске (кластер, схема, опорный конспект). Важно, чтобы это делали сами ученики, а не учитель. Задача этапа – не «напомнить», а «вызвать из памяти» и зафиксировать то, что уже есть.

**Постановка проблемы.** Учащимся предлагается задача или вопрос, которые нельзя решить с помощью одного изученного способа. Для ответа требуется применить несколько инструментов сразу или выбрать между ними. Это создает когнитивный конфликт – ситуацию, в которой интуитивный или шаблонный ответ оказывается недостаточным. Именно в таком конфликте и рождается потребность в систематизации.

**Основная работа.** Учащиеся выполняют задания, которые требуют применения разных изученных способов. Задания могут быть организованы:

- как групповая работа (каждая группа получает свой аспект задачи);
- как индивидуальная работа с последующим обсуждением;
- как последовательное выполнение нескольких заданий, связанных между собой.

На этом этапе учитель не дает готовых решений, а организует деятельность так, чтобы учащиеся сами применяли известные им способы.

**Обсуждение и обобщение.** Ключевой этап урока. Учитель организует обсуждение выполненных заданий, но не для проверки правильности, а для того, чтобы *установить связи* между разными способами действий и понятиями. Именно на этом этапе происходит собственно обобщение.

**Рефлексия.** Учащиеся фиксируют для себя, что нового они поняли о связях между изученными темами. Рефлексия не должна сводиться к «понравилось / не понравилось»; ее цель – зафиксировать осознание системности знаний.

**Обобщающие конструкторы** – это специальные задания, которые встроены в урок обобщения и выполняют функцию установления связей между разными темами курса. В отличие от обычных задач, которые проверяют умение применять конкретную формулу или алгоритм, обобщающие конструкторы требуют от ученика:

- сравнивать разные понятия и находить между ними сходства и различия;
- переводить информацию из одной формы представления в другую;
- оценивать границы применимости изученных методов;
- синтезировать знания из разных разделов для решения одной задачи.

Они не выделяются в отдельный этап урока, а вплетены в его ткань: входят в задания для групп, появляются в вопросах для обсуждения, становятся частью проблемной ситуации. Учитель может не акцентировать на них внимание специально, но должен понимать, какое именно обобщение они обеспечивают.

### **Виды обобщающих конструктов**

**Задачи на аналогию.** Ученику предлагается сравнить два понятия или два способа действия из разных тем. Сравнение ведется не по внешним признакам, а по функции, структуре, смыслу.

*Пример:* «Чем отличается среднее арифметическое от медианы? Что каждое из них показывает об этих данных? Когда среднее арифметическое удобнее, а когда – медиана?»

**Цель:** выявить общее в структуре разных понятий, понять их функциональное назначение в системе знаний.

**Задачи на перевод.** Ученику предлагается представить одно и то же явление в разных формах: таблица, график, формула, словесное описание, диаграмма.

*Пример:* «По данной гистограмме восстановите таблицу частот и найдите среднее арифметическое»

**Цель:** осознать, что одна и та же информация может быть закодирована по-разному, и научиться переходить от одного кода к другому.

**Задачи на границы применимости.** Ученику предлагается ситуация, в которой привычный способ действия не работает или дает искаженный результат. Требуется объяснить, почему это происходит, и выбрать другой способ.

*Пример:* «Можно ли использовать среднее арифметическое для описания роста в классе, если там есть один ученик очень высокого роста? Почему? Какой способ описания данных будет более точным в этом случае?»

**Цель:** осознать, что у каждого метода есть границы применимости; научиться выбирать метод адекватно ситуации.

**Задачи на синтез.** Ученику требуется использовать знания из нескольких разделов курса для решения одной задачи или ответа на один вопрос.

*Пример:* «По данным о росте учеников составьте таблицу частот, постройте гистограмму, найдите среднее арифметическое и медиану и сделайте вывод: какой рост типичен для учеников этого класса?»

**Цель:** объединить разрозненные знания в целостную процедуру анализа данных.

Включение обобщающих конструктов в сценарии уроков решает две задачи. Во-первых, они позволяют учителю диагностировать не вычислительные ошибки и не пробелы в знании формул, а именно понимание связей между понятиями – то, что составляет суть обобщения. Во-вторых, конструкты, вплетенные в задания для групп и вопросы для обсуждения, не требуют выделения дополнительного времени: они естественно заменяют собой обычные задания на повторение, но при этом выводят ученика на качественно иной уровень осмысления материала.

Для ученика работа с конструктами важна тем, что она показывает: математика – не набор отдельных правил, а система, в которой все связано. Она развивает мышление более высокого уровня (анализ, сравнение, оценку, синтез) и приближает учебную деятельность к реальной жизни, где редко встречаются задачи «по формуле», а чаще – задачи на выбор метода, оценку ситуации, интерпретацию результатов.

## 10 КЛАСС

---

---

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| 32 | Обобщение и систематизация знаний |
|----|-----------------------------------|

|    |                                   |
|----|-----------------------------------|
| 34 | Обобщение и систематизация знаний |
|----|-----------------------------------|

---

## 11 КЛАСС

---

---

|    |                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------|
| 24 | Представление данных с помощью таблиц и диаграмм, описательная статистика |
|----|---------------------------------------------------------------------------|

|    |                                                 |
|----|-------------------------------------------------|
| 25 | Опыты с равновероятными элементарными событиями |
|----|-------------------------------------------------|

|    |                                                      |
|----|------------------------------------------------------|
| 26 | Вычисление вероятностей событий с применением формул |
|----|------------------------------------------------------|

|    |                                                                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 27 | Вычисление вероятностей событий с применением графических методов: координатная прямая, дерево, диаграмма Эйлера |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| 28 | Случайные величины и распределения |
|----|------------------------------------|

|    |                                            |
|----|--------------------------------------------|
| 29 | Математическое ожидание случайной величины |
|----|--------------------------------------------|

|    |                                            |
|----|--------------------------------------------|
| 30 | Математическое ожидание случайной величины |
|----|--------------------------------------------|

|    |                                                                            |
|----|----------------------------------------------------------------------------|
| 32 | Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов |
|----|----------------------------------------------------------------------------|

|    |                                                                            |
|----|----------------------------------------------------------------------------|
| 33 | Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов |
|----|----------------------------------------------------------------------------|

|    |                                                                                |
|----|--------------------------------------------------------------------------------|
| 34 | Случайные величины и распределения. Математическое ожидание случайной величины |
|----|--------------------------------------------------------------------------------|

---



## 10 класс. Урок 32. Обобщение и систематизация знаний

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о случайных величинах, их распределениях, математическом ожидании и дисперсии через решение практической задачи выбора игровой стратегии, демонстрирующей противоречие между интуицией и математическим анализом.

**Ключевое обобщение:** математическое ожидание показывает средний ожидаемый результат, дисперсия и стандартное отклонение – уровень риска. При выборе стратегии в условиях неопределённости интуиция может подводить: стратегия, которая кажется успешной, на деле может оказаться самой неудачной. Только количественный анализ позволяет принять обоснованное решение.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о случайных величинах, распределениях, математическом ожидании и дисперсии.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое случайная величина? Приведите пример дискретной случайной величины.
- 2) Что такое распределение вероятностей случайной величины?
- 3) Что такое математическое ожидание? Что оно показывает? Как его найти?
- 4) Что такое дисперсия? Что она показывает? Как её найти?
- 5) Что такое стандартное отклонение? Как оно связано с дисперсией?
- 6) Как вы думаете, могут ли эти характеристики помочь в реальной жизни, например, при выборе игры или стратегии?

**Методический комментарий:** учитель фиксирует на доске:

| Характеристика                  | Что показывает                             | Формула                                |
|---------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------|
| Математическое ожидание $E(X)$  | Средний ожидаемый результат                | $E(X) = \sum x_i \cdot p_i$            |
| Дисперсия $D(X)$                | Мера разброса (средний квадрат отклонений) | $D(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$ |
| Стандартное отклонение $\sigma$ | Типичное отклонение от среднего            | $\sigma = \sqrt{D(X)}$                 |

## Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между интуицией и необходимостью количественного анализа.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

**Задание для учащихся:**

Вы участвуете в телевизионной игре «Большой выбор». Ведущий бросает два игральных кубика. Выпадают два числа. В зависимости от выбранной вами стратегии, вы получаете выигрыш.

**Стратегия «А»:** выигрыш =  $4 \cdot (\max(a, b))^2$

**Стратегия «Б»:** выигрыш =  $25 \cdot \min(a, b)$

**Стратегия «В»:** выигрыш =  $5 \cdot a \cdot b$

**Проблемный вопрос:** вы ещё не знаете, какие числа выпадут. Какую стратегию выбрать?

**Задание для учащихся:**

- 1) Какая стратегия вам кажется самой выгодной? Почему?
- 2) Какая стратегия кажется самой безопасной? Почему?
- 3) Какая стратегия кажется «золотой серединой»? Почему?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** отдельные примеры и интуиция не дают полной картины. Чтобы выбрать лучшую стратегию, нужно оценить её «в среднем» и «по разбросу». Именно здесь нам помогут математическое ожидание и дисперсия.

## Этап 3. Групповая работа

**Методическая функция:** применение формул математического ожидания и дисперсии для сравнения стратегий.

**Деятельность учителя:** учитель распределяет учащихся по группам. Каждая группа получает одну стратегию для анализа. Учитель дает таблицу для заполнения.

**Задание 1.**

**Группа 1. Стратегия «А»**

**Стратегия «А»:**  $X = 4 \cdot (\max(a, b))^2$

*Задание:*

- 1) Заполните таблицу распределения.
- 2) Найдите математическое ожидание  $E(X)$ .
- 3) Найдите дисперсию  $D(X)$ .
- 4) Найдите стандартное отклонение  $\sigma(X)$ .
- 5) Запишите: минимальный и максимальный выигрыш.

**Группа 2. Стратегия «Б»**

$$\text{Стратегия «Б»: } X = 25 \cdot \min(a, b)$$

*Задание:*

- 1) Заполните таблицу распределения.
- 2) Найдите математическое ожидание  $E(X)$ .
- 3) Найдите дисперсию  $D(X)$ .
- 4) Найдите стандартное отклонение  $\sigma(X)$ .
- 5) Запишите: минимальный и максимальный выигрыш.

**Группа 3. Стратегия «В»**

$$\text{Стратегия «В»: } X = 5 \cdot a \cdot b$$

*Задание:*

- 1) Заполните таблицу распределения.
- 2) Найдите математическое ожидание  $E(X)$ .
- 3) Найдите дисперсию  $D(X)$ .
- 4) Найдите стандартное отклонение  $\sigma(X)$ .
- 5) Запишите: минимальный и максимальный выигрыш.

**Задание 2. Сводная таблица**

**Деятельность учителя:** учитель собирает результаты групп и фиксирует их на доске в сводной таблице.

| Стратегия | Формула             | $E(X)$ | $D(X)$ | $\sigma(X)$ | Минимум | Максимум |
|-----------|---------------------|--------|--------|-------------|---------|----------|
| «А»       | $4 \cdot \max^2$    |        |        |             |         |          |
| «Б»       | $25 \cdot \min$     |        |        |             |         |          |
| «В»       | $5 \cdot a \cdot b$ |        |        |             |         |          |

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какая стратегия даёт наибольший средний выигрыш? («А» – 87,89)
- 2) Какая стратегия самая рискованная? («А» –  $\sigma = 45,93$  – самый большой разброс)
- 3) Какая стратегия самая стабильная? («Б» –  $\sigma = 35,10$  – самый маленький разброс)

- 4) Какая стратегия даёт наибольший гарантированный минимум? («Б» – 25 рублей)
- 5) Что мы можем сказать о стратегии «В»? (У неё самый низкий средний доход (61,25) и при этом очень высокий риск (44,71). Это самая неудачная стратегия)
- 6) Придумайте названия для каждой стратегии, которые отражают её суть: характер риска, отношение к доходу, философию поведения игрока.



**Обобщающий конструкт (синтез):** сводная таблица позволила сравнить стратегии по единым критериям. Мы сжали целое распределение в три ключевые характеристики. В вероятностных задачах решение должно опираться на расчёты, а не на интуитивные оценки.

**Данные для учителя:**

### Стратегия «А»

| $\max = k$                             | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6     |
|----------------------------------------|------|------|------|------|------|-------|
| <b>Количество исходов</b>              | 1    | 3    | 5    | 7    | 9    | 11    |
| <b><math>P(\max = k)</math></b>        | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 |
| <b><math>X = 4 \cdot \max^2</math></b> | 4    | 16   | 36   | 64   | 100  | 144   |

### Стратегия «Б»

| $\min = k$                            | 1     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|---------------------------------------|-------|------|------|------|------|------|
| <b>Количество исходов</b>             | 11    | 9    | 7    | 5    | 3    | 1    |
| <b><math>P(\min = k)</math></b>       | 11/36 | 9/36 | 7/36 | 5/36 | 3/36 | 1/36 |
| <b><math>X = 25 \cdot \min</math></b> | 25    | 50   | 75   | 100  | 125  | 150  |

### Стратегия «В»

| $a \cdot b$                               | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 8    | 9    | 10   | 12   | 15   | 16   | 18   | 20   | 24   | 25   | 30   | 36   |
|-------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Кол-во</b>                             | 1    | 2    | 2    | 3    | 2    | 4    | 2    | 1    | 2    | 4    | 2    | 1    | 2    | 2    | 2    | 1    | 2    | 1    |
| <b>P</b>                                  | 1/36 | 2/36 | 2/36 | 3/36 | 2/36 | 4/36 | 2/36 | 1/36 | 2/36 | 4/36 | 2/36 | 1/36 | 2/36 | 2/36 | 2/36 | 1/36 | 2/36 | 1/36 |
| <b><math>X = 5 \cdot a \cdot b</math></b> | 5    | 10   | 15   | 20   | 25   | 30   | 40   | 45   | 50   | 60   | 75   | 80   | 90   | 100  | 120  | 125  | 150  | 180  |

### Сводная таблица

| Стратегия | Формула             | $E(X)$       | $\sigma(X)$  | Минимум | Максимум |
|-----------|---------------------|--------------|--------------|---------|----------|
| «А»       | $4 \cdot \max^2$    | <b>87,89</b> | <b>45,93</b> | 4       | 144      |
| «Б»       | $25 \cdot \min$     | <b>63,19</b> | <b>35,1</b>  | 25      | 150      |
| «В»       | $5 \cdot a \cdot b$ | <b>61,25</b> | <b>44,71</b> | 5       | 180      |

### Задание 3. Проверка на практике

**Методическая функция:** эмпирическая проверка теоретических выводов, развитие исследовательских навыков.

**Деятельность учителя:** учитель выдаёт каждой группе по два игральных кубика и предлагает провести эксперимент.

*Задание для групп:*

Каждая группа получает два кубика. Сделайте 15-20 бросков (по 2 кубика за один бросок). Для каждого броска:

- 1) Запишите выпавшие числа (a, b).
- 2) Вычислите выигрыш по всем трём стратегиям.
- 3) Заполните таблицу.

| № броска | a | b | «А» ( $4 \cdot \max^2$ ) | «Б» ( $25 \cdot \min$ ) | «В» ( $5 \cdot a \cdot b$ ) |
|----------|---|---|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1        |   |   |                          |                         |                             |
| 2        |   |   |                          |                         |                             |
| ...      |   |   |                          |                         |                             |
| N        |   |   |                          |                         |                             |

*Задание для групп:*

- 1) Найдите средний выигрыш по каждой стратегии на основе 15-20 бросков.
- 2) Сравните с теоретическим математическим ожиданием.

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Насколько экспериментальный средний выигрыш близок к теоретическому?
- 2) Какая стратегия в вашем эксперименте оказалась самой выгодной? Совпало ли это с теорией?
- 3) Почему результаты эксперимента могут отличаться от теории? Что нужно сделать, чтобы они стали ближе?

**Методический комментарий:** это задание показывает, что при малом числе испытаний частота (среднее) может отличаться от вероятности (математического ожидания). При 20 бросках разброс будет заметным, что создаёт основу для обсуждения закона больших чисел.

#### **Этап 4. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Установление связей между математическими характеристиками и реальным принятием решений.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какой вывод можно сделать о выборе стратегии?
- 2) Что для вас важнее при выборе стратегии – максимизировать средний доход или минимизировать риск? Почему?
- 3) Как вы думаете, для какого типа игроков подходит каждая стратегия?
- 4) Существует ли универсальная «лучшая» стратегия? От чего зависит выбор стратегии?
- 5) Какая стратегия оказалась «ловушкой для интуиции» и почему? Что это говорит о роли интуиции в вероятностных задачах?
- 6) Как вы думаете, почему в реальной жизни (в бизнесе, инвестициях, страховании) так важно учитывать не только средний доход, но и разброс?



**Обобщающий конструкт (синтез):** математическое ожидание даёт ответ на вопрос «Что будет в среднем?», а дисперсия и стандартное отклонение – на вопрос «Насколько велик риск?». Только вместе они позволяют принять обоснованное решение. Интуиция в вероятностных задачах может подвести.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** каждая стратегия устроена по-своему и даёт разные результаты. Чтобы сравнить их, мы использовали математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Математическое ожидание показывает средний ожидаемый результат. Дисперсия и стандартное отклонение показывают, насколько сильно результат может отклоняться от среднего, то есть уровень риска. Минимум и максимум показывают границы возможных результатов.

Выбор стратегии зависит от цели и отношения к риску:

- Если цель – максимизировать доход в долгосрочной перспективе – выбираем стратегию с наибольшим математическим ожиданием.
- Если цель – минимизировать риск и избежать потерь – выбираем стратегию с наименьшей дисперсией.
- Если цель – гарантированный результат – выбираем стратегию с наибольшим минимумом.

В реальной жизни не существует универсальной «лучшей» стратегии. Выбор всегда зависит от ваших целей, вашего отношения к риску и конкретной ситуации. Но этот выбор должен быть осознанным и обоснованным, а не случайным или основанным на интуиции. Именно в этом и заключается главная ценность теории вероятностей и статистики – они дают нам инструменты для принятия решений в условиях неопределённости.

## Этап 5. Рефлексия

- 1) В начале урока вы, возможно, сделали интуитивный выбор стратегии. Что изменилось в вашем понимании после расчётов и эксперимента?
- 2) Какая стратегия оказалась для вас неожиданной? Почему?
- 3) В каких реальных ситуациях может пригодиться умение сравнивать стратегии по математическому ожиданию и дисперсии?
- 4) Что было самым важным для вас на этом уроке – вычислить характеристики, понять их смысл или применить их к реальной задаче? Почему?

## **10 класс. Урок 32. Обобщение и систематизация знаний.**

### **Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/yMe34gf-zCv6cw>**



**10 класс. Урок 32. Обобщение и систематизация знаний**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с исходными данными (описание стратегий);
- слайд с заданием для учащихся (работа по группам);
- слайд с итоговой таблицей для заполнения;
- слайд с таблицей для заполнения (эксперимент);
- ответы для учителя.



## 10 класс. Урок 34. Обобщение и систематизация знаний

**Методическая цель урока:** создать условия для осознания учащимися того, что совместное распределение, математическое ожидание, дисперсия и проверка независимости – это единый инструментарий для анализа связи между двумя случайными величинами и принятия решений в условиях неопределённости.

**Ключевое обобщение:** совместное распределение показывает связь между двумя случайными величинами. Математическое ожидание даёт среднее значение, дисперсия – меру разброса (риска). Проверка независимости позволяет понять, связаны ли величины. Линейные преобразования показывают, как изменение условий влияет на средние и риски. Вместе эти инструменты помогают принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о совместном распределении, математическом ожидании, дисперсии, независимости и линейных преобразованиях.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое совместное распределение двух случайных величин? Как оно задаётся?
- 2) Как по таблице совместного распределения найти распределение каждой величины по отдельности?
- 3) Что такое математическое ожидание? Что оно показывает? Как его найти?
- 4) Что такое дисперсия? Что она показывает? Как её найти?

**Методический комментарий:** учитель фиксирует на доске:

| Что             | Как найти                         | Что показывает               |
|-----------------|-----------------------------------|------------------------------|
| Распределение X | Суммируем вероятности по строкам  | Распределение X само по себе |
| Распределение Y | Суммируем вероятности по столбцам | Распределение Y само по себе |
| $E(X)$          | $\sum x \cdot P(X=x)$             | Среднее значение X           |
| $D(X)$          | $E(X^2) - (E(X))^2$               | Разброс X (риск)             |

## Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между интуицией и необходимостью количественного анализа.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

### Задание для учащихся:

Вы хотите купить новый смартфон. Вы изучили рынок и выяснили, что цена смартфона ( $X$ , в тыс. руб.) и срок его службы ( $Y$ , в годах) – случайные величины, которые связаны между собой. Данные представлены в таблице совместного распределения.

| $X \backslash Y$ | 1–2 года | 3 года | 4 года | 5+ лет |
|------------------|----------|--------|--------|--------|
| до 20            | 0,08     | 0,06   | 0,02   | 0      |
| 20–30            | 0,06     | 0,1    | 0,06   | 0,02   |
| 30–50            | 0,02     | 0,06   | 0,12   | 0,06   |
| 50–80            | 0,01     | 0,03   | 0,08   | 0,1    |
| 80+              | 0        | 0,01   | 0,04   | 0,07   |

**Проблемный вопрос:** у вас есть бюджет 40 тыс. руб. Какой срок службы вы можете ожидать? Стоит ли доплачивать до 50–80 тыс. руб., чтобы получить более долговечный телефон? Ведь существует мнение, что *«нет смысла покупать дорогой телефон – все они ломаются одинаково»*.

### Задание для учащихся:

- 1) Как вы думаете, есть ли связь между ценой и сроком службы?
- 2) Если у вас 40 тыс. руб., на какой срок службы вы можете рассчитывать?
- 3) Стоит ли переплачивать за более дорогой телефон? Почему?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуиция подсказывает, что «дороже = лучше», но насколько это верно? И насколько велик разброс? Чтобы ответить точно, нужно использовать математические инструменты: математическое ожидание, дисперсию, проверку независимости.

## Этап 3. Основная работа

**Методическая функция:** применение всех изученных инструментов для анализа данных и принятия решения.

### Задание 1. Распределение $X$ и $Y$

По таблице совместного распределения найдите:

- 1)  $P(X = \text{до } 20)$ ,  $P(X = 20\text{--}30)$ ,  $P(X = 30\text{--}50)$ ,  $P(X = 50\text{--}80)$ ,  $P(X = 80+)$
- 2)  $P(Y = 1\text{--}2 \text{ года})$ ,  $P(Y = 3 \text{ года})$ ,  $P(Y = 4 \text{ года})$ ,  $P(Y = 5+ \text{ лет})$

## Задание 2. Основные характеристики

- 1) Найдите среднюю цену смартфона  $E(X)$ .
- 2) Найдите средний срок службы  $E(Y)$ .
- 3) Найдите дисперсию цены  $D(X)$  и дисперсию срока службы  $D(Y)$ .

**Методический комментарий:** для упрощения вычислений используйте средние значения интервалов:  $X$ : 15, 25, 40, 65, 90 (тыс. руб.);  $Y$ : 1,5, 3, 4, 5,5 (лет).

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Что означает  $E(X) = 43,9$ ? Что это говорит о рынке? *(Средняя цена смартфона в выборке – 43,9 тыс. руб.)*
- 2) Что означает  $D(X) = 576,29$ ? Что это говорит о рынке? *(Разброс цен большой ( $\sigma \approx 24$  тыс. руб.). Рынок неоднороден: есть и очень дешёвые, и очень дорогие модели)*
- 3) Что означает  $D(Y) = 1,7889$ ? Что это говорит о сроках службы? *(Разброс срока службы умеренный ( $\sigma \approx 1,34$  года). Большинство смартфонов служат 3–4 года, но есть и те, которые ломаются через 1–2 года, и те, которые служат 5+ лет)*
- 4) Вспомните, как вы находили математическое ожидание и дисперсию в 9 классе. Чем отличается вычисление  $E(X)$  и  $D(X)$  из таблицы совместного распределения от вычисления по обычному распределению?

## Задание 3.

Проверьте, являются ли  $X$  и  $Y$  независимыми. Для этого сравните  $P(X = 30–50, Y = 3 \text{ года})$  и  $P(X = 30–50) \cdot P(Y = 3 \text{ года})$ .

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Сделайте вывод: зависимы или нет? Что это означает для покупателя? *(Цена и срок службы зависимы. Это означает, что цена действительно даёт информацию о том, сколько прослужит телефон. Дорогие смартфоны в среднем служат дольше)*



**Обобщающий конструкт (аналогия):** если бы цена и срок службы были независимы, то знание цены ничего бы не говорило о сроке службы. Но в реальности это не так – цена даёт информацию о том, сколько прослужит телефон. Проверка независимости позволяет эту связь обнаружить.

## Задание 4. Линейные преобразования

- 1) Найдите  $E(1,1X)$  и  $D(1,1X)$ .
- 2) Найдите  $E(1,5Y)$  и  $D(1,5Y)$ .

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Что произойдёт со средней ценой и её разбросом, если цены вырастут на 10% (инфляция)? *(Средняя цена станет 48,29 тыс. руб. (вырастет на 4,39 тыс.). Разброс цен вырастет до 697,31 (риск увеличится))*

2) Что произойдёт со средним сроком службы и его разбросом, если срок службы увеличится в 1,5 раза? (Средний срок службы станет 5,535 года. Разброс вырастет до 4,025)

#### Данные для учителя

| X    | до 20 | 20–30 | 30–50 | 50–80 | 80+  |
|------|-------|-------|-------|-------|------|
| P(X) | 0,16  | 0,24  | 0,26  | 0,22  | 0,12 |

| Y    | 1–2 года | 3 года | 4 года | 5+ лет |
|------|----------|--------|--------|--------|
| P(Y) | 0,17     | 0,26   | 0,32   | 0,25   |

$$E(X) = 43,9$$

$$E(X^2) = 2503,5$$

$$D(X) = 576,29$$

$$E(Y) = 3,69$$

$$E(Y^2) = 15,405$$

$$D(Y) = 1,7889$$

$$E(1,1X) = 48,29$$

$$D(1,1X) = 697,31$$

$$E(1,5Y) = 5,535$$

$$D(1,5Y) = 4,025$$

| Величина                     | Математическое ожидание         | Дисперсия          |
|------------------------------|---------------------------------|--------------------|
| X (цена)                     | $E(X) = 43,9$                   | $D(X) = 576,29$    |
| Y (срок службы)              | $E(Y) = 3,69$                   | $D(Y) = 1,7889$    |
| 1,1X (инфляция, +10%)        | $E(1,1X) = 48,29$               | $D(1,1X) = 697,31$ |
| 1,5Y (рост срока в 1,5 раза) | $E(1,5Y) = 5,535$               | $D(1,5Y) = 4,025$  |
| Зависимость X и Y            | зависимы ( $0,06 \neq 0,0676$ ) |                    |

#### Этап 4. Презентация и обобщение

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Установление связей между математическими характеристиками и реальным принятием решений.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) В начале урока мы обсудили мнение, что «нет смысла покупать дорогой телефон – все они ломаются одинаково». Что вы теперь можете сказать об этом утверждении, используя данные таблицы и вычисленные характеристики? (Данные опровергают это утверждение. Цена и срок службы зависимы)
- 2) Можно ли утверждать, что «дорогое = качественное»? (Есть разброс: не все дорогие телефоны служат долго, и не все дешёвые ломаются быстро. Но в среднем зависимость есть)
- 3) Если у вас бюджет 40 тыс. руб., на какой срок службы вы можете рассчитывать? (В категории 30–50 тыс.: вероятность прослужить 3 года – 0,06, 4 года – 0,12, 5+ лет – 0,06. Скорее всего, телефон прослужит 3–4 года)
- 4) Стоит ли доплачивать до 50–80 тыс. руб., чтобы получить более долговечный телефон?
- 5) Какой главный вывод вы можете сделать о связи математики и реальной жизни?



**Обобщающий конструктор (синтез):** совместное распределение показывает связь между ценой и сроком службы. Математическое ожидание даёт средние значения. Дисперсия показывает разброс (риск). Проверка независимости подтверждает, что цена и срок службы связаны. Линейные преобразования показывают, как изменение условий влияет на средние и риски. Вместе эти инструменты помогают принять осознанное решение.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** статистика и теория вероятностей дают нам инструменты для осознанного выбора. Они позволяют не гадать, а оценивать, сравнивать и принимать обоснованные решения. В реальной жизни мы постоянно сталкиваемся с выбором: купить дорогое и надёжное или дешёвое и рискованное? Математика помогает сделать этот выбор осознанным, а не случайным.

### **Этап 5. Рефлексия**

- 1) В начале урока вы, возможно, считали, что выбор смартфона – это вопрос личных предпочтений. Что изменилось в вашем понимании после анализа данных?
- 2) Какой инструмент из курса 10 класса оказался для вас самым полезным для анализа рынка смартфонов? Почему?
- 3) В каких других сферах жизни может пригодиться умение анализировать связь между случайными величинами?
- 4) Что было самым важным для вас на этом уроке – вычислить характеристики, понять их смысл или применить их к реальной задаче? Почему?

## **10 класс. Урок 34. Обобщение и систематизация знаний.**

### **Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/mWNwDFF7jvZ5FA>**



**10 класс. Урок 34. Обобщение и систематизация знаний**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с исходными данными;
- слайд с таблицей для заполнения;
- ответы для учителя.

## 11 класс. Урок 24. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм, описательная статистика

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о различных способах представления данных (таблицы, круговые диаграммы, гистограммы, ящик с усами) и их интерпретации через решение практической задачи анализа статистических отчётов четырёх вузов, демонстрирующей, как выбор способа визуализации может влиять на восприятие информации и использоваться для манипуляции.

**Ключевое обобщение:** одни и те же данные можно представить по-разному: таблица даёт точность, круглая диаграмма показывает доли, гистограмма – распределение, ящик с усами – медиану и разброс. Каждый способ отвечает на свой вопрос. Однако выбор способа представления данных может создавать иллюзию – показывать информацию так, как выгодно представляющей стороне. Умение критически оценивать визуализацию данных – важный навык, который помогает принимать обоснованные решения в реальной жизни.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о способах представления данных и статистических характеристиках.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Какие способы представления данных вы знаете?
- 2) Что даёт нам каждый из этих способов? Какую информацию мы получаем из таблицы? Из круговой диаграммы? Из гистограммы? Из ящика с усами?
- 3) В каких случаях мы выбираем тот или иной способ?
- 4) Может ли один и тот же набор данных выглядеть по-разному в разных диаграммах?
- 5) Если один и тот же набор данных можно представить по-разному, то как понять, какой способ представления «правильный»?

**Методический комментарий:** учитель фиксирует на доске:

| Способ представления | Что показывает                      | Когда используют                         | Ограничение                       |
|----------------------|-------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------|
| Таблица              | Точные значения                     | Когда нужна точность                     | Не наглядна                       |
| Круговая диаграмма   | Доли частей в целом                 | Когда нужно показать пропорции           | Скрывает детали                   |
| Гистограмма          | Распределение по интервалам         | Когда нужно показать форму распределения | Зависит от выбора интервалов      |
| Ящик с усами         | Медиану, квартили, разброс, выбросы | Когда нужно показать структуру данных    | Не показывает форму распределения |

## Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между слоганом вуза и тем, что скрывают диаграммы.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

### Задание для учащихся:

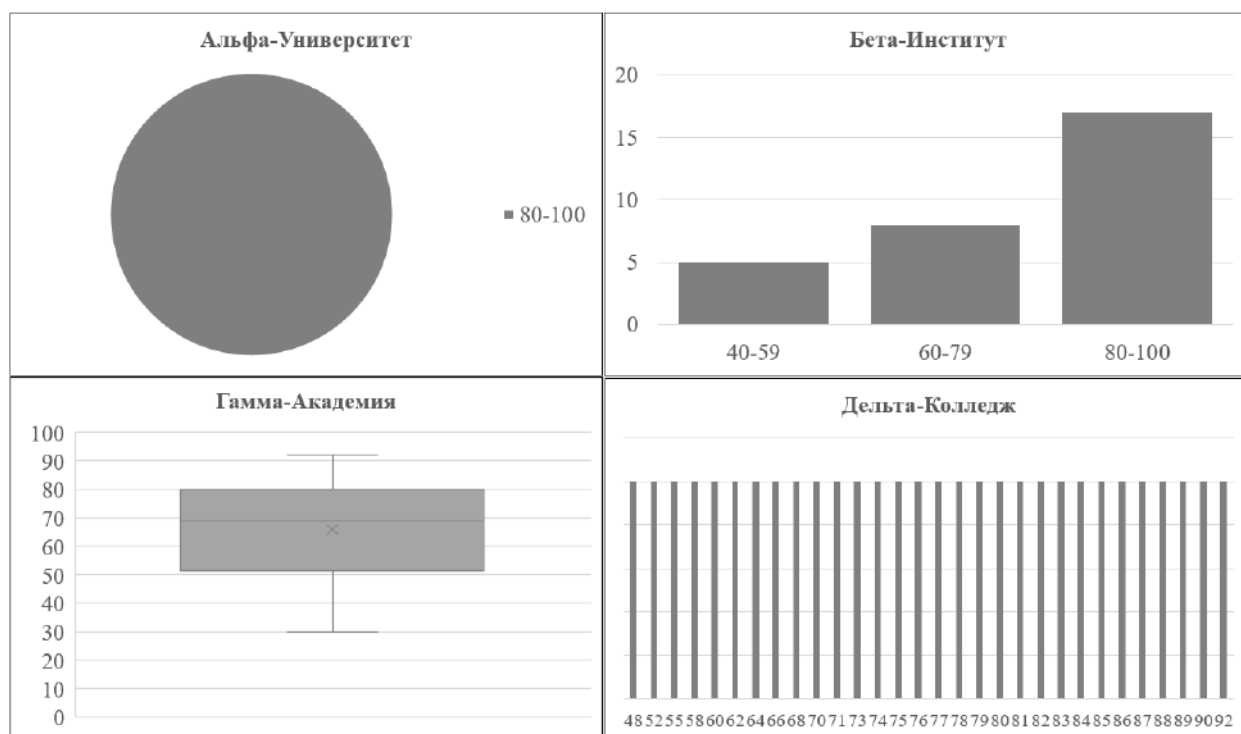
Вы – абитуриент, который выбирает вуз для поступления. Четыре вуза публикуют отчёты о результатах вступительных экзаменов. У вас есть только слоган и диаграмма, которые опубликовал каждый вуз.

Ваша задача – проанализировать слоган и диаграмму и сделать предварительный вывод: можно ли доверять этому вузу, или он пытается манипулировать абитуриентами?

**Проблемный вопрос:** кто из вузов говорит правду, а кто манипулирует или откровенно врёт? Как вы это определили?

### Задание для учащихся:

- 1) Посмотрите на слоган и диаграмму каждого вуза. Что вы можете сказать о каждом из них?
- 2) Какой слоган кажется вам самым убедительным? Почему?
- 3) Какая диаграмма кажется вам самой наглядной? Почему?
- 4) Есть ли вуз, который, по вашему мнению, манипулирует данными?





**«Альфа-Университет»**

**Слоган:** *«Средний балл наших абитуриентов – 95! Мы – лучшие!»*

**«Бета-Институт»**

**Слоган:** *«Более 50% наших абитуриентов набирают самые высокие баллы! Приходи к нам!»*

**«Гамма-Академия»**

**Слоган:** *«Мы – самый стабильный вуз! У нас почти нет выбросов!»*

**«Дельта-Колледж»**

**Слоган:** *«Наши студенты показывают ровные результаты без провалов!»*

### **Этап 3. Основная работа**

**Методическая функция:** проверка гипотез через вычисление статистических характеристик и построение диаграмм.

**Деятельность учителя:** учитель выдаёт учащимся полные данные по абитуриентам их вуза (по группам или фронтально – на усмотрение учителя).

**Альфа-Университет (30 абитуриентов):**

80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 100,  
100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100

**Бета-Институт (30 абитуриентов):**

45, 50, 52, 55, 58, 60, 62, 65, 68, 70, 72, 75, 78, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80,  
80, 80, 81, 82, 83, 84, 85

**Гамма-Академия (30 абитуриентов):**

30, 35, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 58, 60, 62, 65, 65, 68, 70, 70, 72, 75, 75, 78, 78, 80,  
80, 82, 85, 85, 88, 90, 92

**Дельта-Колледж (30 абитуриентов):**

48, 52, 55, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84,  
85, 86, 87, 88, 89, 90, 92

У вас есть сырые данные по всем абитуриентам. Теперь вы можете проверить, честен ли каждый ВУЗ. Как вы это сделаете? Какую диаграмму вы построите, чтобы увидеть то, что скрыла диаграмма вуза? Какие статистические характеристики вы вычислите, чтобы проверить слоган?

### Задание 1.

- 1) Проанализируйте данные.
- 2) Выберите те статистические характеристики и те способы представления данных, которые помогут вам проверить слоган вуза.
- 3) Выполните вычисления и постройте диаграммы.
- 4) Сравните с тем, что показал вуз.
- 5) Сделайте окончательный вывод: вуз говорит правду, манипулирует или врёт?

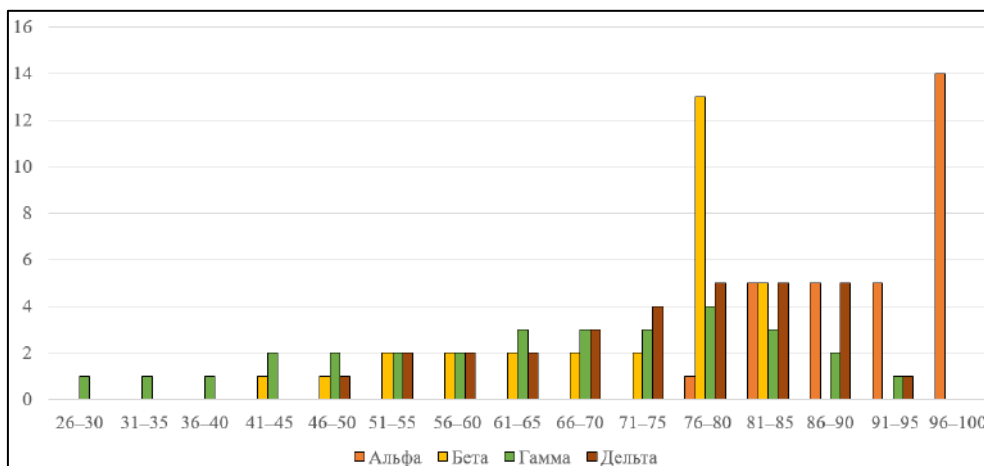


**Обобщающий конструкт (перевод):** сырые данные → статистические характеристики → диаграммы. Мы перевели информацию из одной формы в другую и увидели, что разные способы представления данных могут создавать разное впечатление об одной и той же информации.

### Данные для учителя:

| ВУЗ    | среднее | медиана | размах | дисперсия | $\sigma$ | Q1   | Q3   |
|--------|---------|---------|--------|-----------|----------|------|------|
| Альфа  | 93      | 94,5    | 20     | 46,7      | 6,8      | 87,3 | 100  |
| Бета   | 72,8    | 80      | 40     | 127,3     | 11,3     | 65,8 | 80   |
| Гамма  | 65,8    | 69      | 62     | 286,4     | 16,9     | 52,8 | 79,5 |
| Дельта | 74,4    | 76,5    | 44     | 138,6     | 11,8     | 66,5 | 83,8 |

|        | Альфа | Бета | Гамма | Дельта |
|--------|-------|------|-------|--------|
| 26–30  | 0     | 0    | 1     | 0      |
| 31–35  | 0     | 0    | 1     | 0      |
| 36–40  | 0     | 0    | 1     | 0      |
| 41–45  | 0     | 1    | 2     | 0      |
| 46–50  | 0     | 1    | 2     | 1      |
| 51–55  | 0     | 2    | 2     | 2      |
| 56–60  | 0     | 2    | 2     | 2      |
| 61–65  | 0     | 2    | 3     | 2      |
| 66–70  | 0     | 2    | 3     | 3      |
| 71–75  | 0     | 2    | 3     | 4      |
| 76–80  | 1     | 13   | 4     | 5      |
| 81–85  | 5     | 5    | 3     | 5      |
| 86–90  | 5     | 0    | 2     | 5      |
| 91–95  | 5     | 0    | 1     | 1      |
| 96–100 | 14    | 0    | 0     | 0      |



## Задание 2.

Заполните сводную таблицу:

| Вуз    | Слоган               | Предварительный вывод | Окончательный вывод | Вердикт |
|--------|----------------------|-----------------------|---------------------|---------|
| Альфа  | «Средний балл – 95!» |                       |                     |         |
| Бета   | «>50% – лучшие!»     |                       |                     |         |
| Гамма  | «Стабильность!»      |                       |                     |         |
| Дельта | «Ровные результаты!» |                       |                     |         |

### Вопросы для обсуждения:

- 1) В каких группах предварительная гипотеза подтвердилась? В каких – нет? Почему?
- 2) Какую диаграмму вы построили и почему именно её? Что она показала?

## Этап 4. Презентация и обобщение

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Сравнение предварительных и окончательных выводов.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### Вопросы для общего обсуждения:

- 1) Почему разные вузы выбрали разные типы диаграмм? Как связан выбор диаграммы с тем, что вуз хочет показать или скрыть?
- 2) Какой вуз оказался самым честным? Почему?
- 3) Какой вуз оказался самым манипулятивным? Как он это делал?
- 4) Какой вуз откровенно лгал? В чём это проявлялось?
- 5) Где в жизни вы сталкиваетесь с похожими ситуациями?
- 6) Существует ли самый объективный способ представления данных? Почему мы не можем сказать, что «гистограмма – всегда лучше, а круговая диаграмма – всегда хуже»?



**Обобщающий конструкт (синтез):** один и тот же набор данных можно представить по-разному. Круговая диаграмма показывает доли, гистограмма – распределение, ящик с усами – медиану и разброс. Каждый способ представления акцентирует внимание на разных аспектах данных и может создавать разное впечатление. Чтобы сделать правильный вывод, нужно уметь читать разные типы диаграмм, понимать, что стоит за каждой из них, и критически оценивать информацию, особенно когда её представляют заинтересованные стороны.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** при выборе вуза (и в других жизненных ситуациях) важно смотреть не на одну диаграмму, а на

несколько, чтобы получить полную картину. И всегда задавать себе вопрос: «Что хотят показать авторы этого отчёта? Что они скрывают?»

### **Этап 5. Рефлексия**

- 1) В начале урока вы, возможно, доверяли всем слоганам. Что изменилось в вашем понимании после анализа данных?
- 2) Какой способ представления данных оказался для вас самым понятным? Почему?
- 3) Какой способ представления данных оказался самым манипулятивным? Почему?
- 4) В каких реальных ситуациях (кроме выбора вуза) вам может пригодиться умение критически оценивать визуализацию данных?
- 5) Как связаны между собой три действия, которые вы выполняли на уроке: анализ диаграмм, вычисление характеристик и формулировка выводов? Что из этого было для вас самым сложным и почему?

## **11 класс. Урок 24. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм, описательная статистика. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/gZHRTJ7fXDAshQ>**



**11 класс. Урок 24. Представление данных с помощью таблиц и диаграмм, описательная статистика**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с исходными данными;
- таблица для заполнения;
- ответы для учителя.

## 11 класс. Урок 25. Опыты с равновозможными элементарными событиями

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о классической вероятности и комбинаторных методах её вычисления через решение практической задачи формирования случайной делегации, демонстрирующей, как интуитивные представления о «равных шансах» могут расходиться с математическим расчётом.

**Ключевое обобщение:** в опытах с равновозможными элементарными событиями вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов. Однако подсчёт числа исходов требует осознанного выбора комбинаторной схемы: порядок важен или нет, с возвращением или без. Ошибка в выборе схемы приводит к неверному результату. Комбинаторика – это не просто формулы, а инструмент для точного описания случайных экспериментов.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о классической вероятности и комбинаторных методах подсчёта исходов.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое классическая вероятность? Как она вычисляется?
- 2) Что такое «равновозможные элементарные события»? *Приведите пример.*
- 3) Какие комбинаторные схемы вы знаете? В чём разница между перестановками, размещениями и сочетаниями?
- 4) Как понять, использовать сочетания или размещения в задаче?
- 5) Что такое правило умножения в комбинаторике? Приведите пример.
- 6) Если в опыте все исходы равновозможны, то какая вероятность у каждого отдельного исхода?

#### Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между интуитивным представлением о вероятности и реальным расчётом.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

### Задание для учащихся:

В школе четыре девятых класса: 9А, 9Б, 9В и 9Г. В 9А – 30 учеников, в 9Б – 25, в 9В – 25, в 9Г – 20. Всего 100 человек. Для участия в городской конференции нужно случайным образом выбрать делегацию из 5 человек.

Один ученик говорит: *«В конференции должны участвовать представители всех классов, так будет справедливо! Надо выбрать по одному человеку от каждого класса, а пятого – из любого класса».*

Другой ученик возражает: *«Нет, выбирать надо честно, случайным образом из всех учеников. Если повезёт, то представители всех классов попадут, если нет – значит, нет».*

**Проблемный вопрос:** кто из них прав? Какова вероятность того, что при случайном выборе 5 человек из 100 в делегацию попадут представители всех четырёх классов? Стоит ли вообще требовать, чтобы были представлены все классы?

### Задание для учащихся:

- 1) Как вы думаете, вероятность того, что при случайном выборе попадут представители всех четырёх классов, большая или маленькая?
- 2) Как вы думаете, первый ученик предлагает «справедливый» способ? А второй?
- 3) Что нужно посчитать, чтобы ответить на вопрос о вероятности?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуиция может подсказывать, что при случайном выборе из 100 человек «все классы должны быть представлены». Но насколько это вероятно? Чтобы ответить точно, нужно применить комбинаторику: подсчитать общее число способов выбрать 5 человек и число способов, при которых представлены все 4 класса.

## Этап 3. Основная работа

**Методическая функция:** применение комбинаторных методов для вычисления вероятности.

### Задание 1.

Найдите общее число способов выбрать 5 человек из 100. Объясните, почему вы выбрали именно эту комбинаторную схему ( $C_{100}^5$  – сочетания, потому что порядок выбора не важен (делегация – это множество людей, а не упорядоченный список).

### Задание 2.

Найдите число способов выбрать 5 человек так, чтобы в делегации были представители всех четырёх классов. (18 000 000 благоприятных исходов)

**Методический комментарий:** если учащиеся затрудняются, то можно дать подсказку: «Чтобы были представлены все 4 класса, один класс должен дать 2 делегата, а остальные три класса – по 1. Какой класс даст 2 делегата? Сколько существует способов выбрать 2 человек из этого класса? Сколько способов выбрать по 1 человеку из каждого из трёх оставшихся классов?»

### **Задание 3.**

Найдите вероятность того, что при случайном выборе 5 человек из 100 в делегацию попадут представители всех четырёх классов. ( $\approx 0,239$ )

 **Обобщающий конструкт (синтез):** мы разбили сложную задачу на несколько простых шагов. Сначала выбрали класс, который будет представлен 2 делегатами. Затем для каждого варианта подсчитали число способов выбрать нужное количество человек из каждого класса. И только потом сложили результаты. Комбинаторика позволяет разбивать сложные задачи на простые, решать их по отдельности и комбинировать результаты с помощью правила умножения и сложения.

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Что произойдёт с вероятностью, если размер делегации увеличится до 6 человек? (*Вероятность вырастет, так как больше шансов, что попадут все классы*)
- 2) Что произойдёт с вероятностью, если все классы будут равными (по 25 человек)? (*Вероятность изменится, так как классы станут равноправными*)
- 3) Что произойдёт с вероятностью, если в 9Г будет не 20, а 30 человек? (*Вероятность изменится, так как шансы попасть в делегацию у учеников 9Г вырастут*)

### **Задание 4.**

Первый ученик предлагал выбрать по одному человеку от каждого класса, а пятого – из любого класса. Какова вероятность того, что при таком способе все классы будут представлены? (*1, событие достоверное*)

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какой способ справедливее?
- 2) Что значит «справедливо» в данном контексте?

 **Обобщающий конструкт (границы применимости):** «Справедливость» в вероятностных задачах – понятие сложное. Случайный выбор гарантирует равные шансы для каждого человека, но не гарантирует представительства всех групп. Гарантированное представительство всех групп требует отказа от равных шансов для каждого человека. Выбор между этими подходами – это не математический, а ценностный вопрос: что для нас важнее – равные шансы для каждого или представительство всех групп?



## Этап 4. Презентация и обобщение

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Сравнение разных подходов к формированию делегации.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какой результат вас удивил? Ожидали ли вы, что вероятность будет именно такой?
- 2) Почему вероятность не равна 100%? Что мешает случайному выбору всегда давать представителей всех классов?
- 3) Что такое «справедливость» в вероятностных задачах? Это математическое понятие или этическое?
- 4) Если бы вы были организаторами конференции, какой способ вы бы выбрали? Почему?
- 5) В каком из двух подходов – «случайный выбор» или «гарантированное представительство» – больше математики, а в каком – больше этики? Что важнее в разных ситуациях?



**Обобщающий конструкт (синтез):** в опытах с равновероятными элементарными событиями вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов. Чтобы правильно посчитать число исходов, нужно выбрать комбинаторную схему. В этой задаче мы использовали сочетания, потому что порядок выбора не важен. Для подсчёта благоприятных исходов мы разбили задачу на случаи (какой класс даёт 2 делегатов), применили правило умножения и сложили результаты.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** Чтобы гарантировать представительство всех групп, нужно отказаться от случайности – например, выбрать по одному человеку от каждого класса, а пятого – из любого. Но тогда нарушается принцип равных шансов для каждого человека. «Справедливость» – это не математическое, а ценностное понятие. Что важнее – равные шансы для каждого или представительство всех групп? Ответ зависит от целей и ценностей. Комбинаторика – это не просто формулы, а инструмент для принятия решений. Она позволяет оценить вероятности и сделать осознанный выбор между разными способами формирования делегации.

## Этап 5. Рефлексия

- 1) Какой этап решения задачи был для вас самым сложным – подсчёт общего числа исходов, подсчёт благоприятных исходов или интерпретация результата? Почему?
- 2) Что вы теперь можете сказать о связи между «случайностью» и «справедливостью»?
- 3) В каких реальных ситуациях (кроме выбора делегации) важно понимать, что случайный выбор не гарантирует представительства всех групп?
- 4) Что было самым важным для вас на этом уроке – вычислить вероятность, понять комбинаторную логику или осмыслить понятие «справедливости»? Почему?

## **11 класс. Урок 25. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/SkPGStEYn90Kpg>**



**11 класс. Урок 25. Опыты с равновозможными элементарными событиями**

Материалы к уроку включают в себя:

- ответы для учителя.

## 11 класс. Урок 26. Вычисление вероятностей событий с применением формул

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о применении формул полной вероятности и Байеса через решение практической задачи диагностики редкого заболевания в двух больницах с разными технологиями тестирования, демонстрирующей, как последовательное обновление информации может как повышать, так и понижать вероятность события, и как важно учитывать надёжность каждого источника данных.

**Ключевое обобщение:** формула полной вероятности и формула Байеса – это инструменты для последовательного обновления вероятностей. Каждый новый результат (положительный или отрицательный) меняет наше представление о вероятности события. Однако важно понимать: больше информации не всегда означает большую уверенность. Если новые данные противоречат предыдущим, уверенность может не только не вырасти, но и упасть. Умение правильно интерпретировать противоречивую информацию – важнейший навык принятия решений в условиях неопределённости.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о формуле полной вероятности, формуле Байеса, условной вероятности и дереве вероятностей.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое условная вероятность? Как она обозначается и вычисляется?
- 2) Что такое формула полной вероятности? Когда её применяют?
- 3) Что такое формула Байеса? Когда её применяют?
- 4) В чём разница между априорной и апостериорной вероятностью?
- 5) Что такое дерево вероятностей? Для чего оно используется?
- 6) Как вы думаете, если у нас есть два независимых источника информации, то после получения данных от обоих наша уверенность всегда растёт?

**Методический комментарий:** учитель фиксирует на доске формулы и опорную схему. Учитель подводит к мысли: *«Сегодня мы увидим, как эти формулы работают в реальной задаче медицинской диагностики. Мы столкнёмся с ситуацией, когда дополнительная информация не повышает уверенность, а наоборот – снижает её. Это важно для понимания того, как правильно интерпретировать противоречивые данные».*

## Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между интуицией и результатами расчётов.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

**Задание для учащихся:**

В городе есть две больницы, которые используют разные технологии для диагностики редкого заболевания. Заболевание встречается у 0,5% людей (5 из 1000).

Больница А («АльфаМед»): использует стандартный тест.

- Чувствительность (вероятность положительного результата у больного): 0,95.
- Специфичность (вероятность отрицательного результата у здорового): 0,97 (ложноположительный результат – 0,03).

Больница Б («БетаМед»): использует новую технологию с тремя независимыми тестами. Результат считается положительным, если хотя бы два из трёх тестов дали положительный результат.

- Каждый тест имеет те же характеристики, что и в больнице А: чувствительность 0,95, специфичность 0,97.
- Тесты независимы.

Пациент для надёжности проходит обследование в обеих больницах. В больнице А тест положительный. В больнице Б два из трёх тестов дали положительный результат (третий – отрицательный).

**Проблемный вопрос:** какова вероятность того, что пациент действительно болен? Стоит ли доверять результатам? Есть ли смысл проходить обследование в обеих больницах?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуитивно кажется, что, если пройти несколько обследований, уверенность в диагнозе только вырастет. Но это не всегда так. Если результаты противоречат друг другу, уверенность может не вырасти, а упасть. Важно понимать, как интерпретировать противоречивую информацию и когда дополнительные тесты действительно помогают, а когда – только запутывают.

## Этап 3. Основная работа

**Методическая функция:** применение формул полной вероятности и Байеса для последовательного обновления вероятностей в разных сценариях.

### **Задание 1.**

Постройте дерево вероятностей для больницы А и найдите вероятность того, что пациент болен, если тест положительный. ( $\approx 0,137$ )

### **Задание 2.**

Найдите вероятность того, что пациент болен, если в больнице Б результат положительный (хотя бы 2 из 3 тестов положительные). ( $\approx 0,653$ )

### **Задание 3.**

Пациент получил положительный результат в больнице А и положительный результат в больнице Б. Какова теперь вероятность болезни? ( $\approx 0,984$ )

### **Задание 4.**

А что, если в больнице А тест положительный, а в больнице Б – отрицательный (0 из 3 тестов положительные)? Какова тогда вероятность болезни? ( $\approx 0,000022$ )

### **Вопросы для обсуждения:**

1) Что, если в больнице Б из трёх тестов положительный только один? Какова будет вероятность болезни? *(Этот случай не является ни положительным (хотя бы 2 из 3), ни отрицательным (0 из 3)). Правило больницы Б не даёт однозначного ответа. Врачи могут либо повторить тесты, либо интерпретировать результат как «сомнительный»)*



**Обобщающий конструкт (аналогия):** формула Байеса работает как «обновление знаний». После каждого нового теста мы пересчитываем вероятность болезни. Если результаты согласуются – уверенность растёт. Если противоречат – уверенность падает. В этом смысле новые данные – это не всегда «хорошая новость». Иногда они заставляют нас пересмотреть предыдущие выводы и признать, что мы были не правы.

### **Этап 4. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Установление связей между формулами и реальным принятием решений.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какой результат вас удивил больше всего? Почему?
- 2) Почему после первого положительного теста вероятность болезни всего 13,7%, а после двух положительных (в двух больницах) – уже 98,4%?
- 3) А почему после положительного теста в больнице А и отрицательного в больнице Б вероятность болезни падает практически до нуля?

- 4) Как вы думаете, почему люди часто игнорируют противоречивые результаты и доверяют только «удобным» данным?
- 5) Как вы думаете, какая информация важнее: положительный результат в одной больнице или отрицательный в другой?
- 6) Что бы вы посоветовали пациенту, если результаты обследований противоречат друг другу?



**Обобщающий конструкт (синтез):** формула полной вероятности позволяет вычислить общую вероятность события с учётом всех гипотез. Формула Байеса позволяет пересмотреть вероятности гипотез после получения новой информации. Вместе они дают возможность принимать решения в условиях неопределённости.

Однако важно помнить: новые данные могут как повышать, так и понижать вероятность. Если данные согласуются, уверенность растёт. Если противоречат – уверенность падает. Игнорирование противоречивых данных – одна из самых распространённых ошибок в принятии решений.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** больше информации не всегда значит больше уверенности. Иногда новая информация противоречит старой, и нужно уметь правильно её интерпретировать. В реальной жизни мы постоянно сталкиваемся с противоречивыми данными – в медицине, бизнесе, науке. Умение обновлять вероятности на основе новой информации – ключевой навык принятия решений в условиях неопределённости.

## Этап 5. Рефлексия

- 1) В начале урока вы, возможно, считали, что положительный тест почти гарантирует болезнь. Что изменилось в вашем понимании после расчётов?
- 2) Как вы думаете, почему люди (включая вас) часто переоценивают вероятность болезни после одного положительного теста? Какая когнитивная ошибка здесь проявляется?
- 3) Как вы думаете, почему в реальной жизни врачи иногда не доверяют результатам анализов и назначают повторные обследования?
- 4) В каких других сферах жизни (кроме медицины) вы сталкиваетесь с ситуацией, когда нужно интерпретировать противоречивые данные?
- 5) Что было самым важным для вас на этом уроке – вычислить вероятности, понять логику Байеса или осознать, что новые данные могут противоречить старым?

## **11 класс. Урок 26. Вычисление вероятностей событий с применением формул. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/XNUokD1m7jgYMg>**



**11 класс. Урок 26. Вычисление вероятностей событий с применением формул**

Материалы к уроку включают в себя:

- ответы для учителя.



## 11 класс. Урок 27. Вычисление вероятностей событий с применением графических методов: координатная прямая, дерево, диаграмма Эйлера

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о применении дерева вероятностей как графического метода вычисления вероятностей через решение практической задачи анализа футбольного турнира, демонстрирующей, как структурированное представление случайного эксперимента помогает увидеть все возможные исходы и правильно вычислить вероятности сложных событий.

**Ключевое обобщение:** дерево вероятностей – это графический метод, который позволяет наглядно представить все возможные исходы многошагового случайного эксперимента. Каждая ветвь дерева соответствует одному элементарному исходу, вероятность которого равна произведению вероятностей вдоль пути. Сумма вероятностей всех ветвей равна 1. Дерево вероятностей помогает не запутаться в сложных многошаговых экспериментах и правильно применять правило умножения вероятностей.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о дереве вероятностей, правиле умножения и классической вероятности.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое дерево вероятностей? Для чего оно используется?
- 2) Как найти вероятность конкретного исхода по дереву вероятностей?
- 3) Чему равна сумма вероятностей всех ветвей дерева?
- 4) Что такое правило умножения вероятностей? Когда его применяют?
- 5) Что такое полная вероятность события?
- 6) Как вы думаете, в каких ситуациях дерево вероятностей особенно полезно?

#### Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между интуитивным представлением о силе команды и реальной вероятностью выхода в финал.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

**Задание для учащихся:**

В футбольном турнире участвуют четыре команды: А, Б, В и Г. Каждая команда играет с каждой по одному матчу (всего 3 матча на команду). Для выхода в финал команде нужно одержать не менее двух побед.

Вероятности исходов каждого матча известны и заданы в таблице.

| Матч   | Победа первой | Ничья | Победа второй |
|--------|---------------|-------|---------------|
| А vs Б | 0,4           | 0,2   | 0,4           |
| А vs В | 0,5           | 0,2   | 0,3           |
| А vs Г | 0,5           | 0,2   | 0,3           |
| Б vs В | 0,4           | 0,3   | 0,3           |
| Б vs Г | 0,4           | 0,3   | 0,3           |
| В vs Г | 0,3           | 0,3   | 0,4           |

**Задание для учащихся:**

- 1) Какая команда, по вашему мнению, самая сильная? Почему?
- 2) Какая команда, по вашему мнению, имеет наибольший шанс на выход в финал?
- 3) Как вы думаете, вероятность выхода в финал у самой сильной команды близка к 100%?

**Проблемный вопрос:** какая команда имеет наибольшую вероятность выхода в финал? Совпадает ли это с интуицией?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуитивно кажется, что сильная команда почти гарантированно выходит в финал. Но это не так. Даже у явного фаворита есть риск не набрать нужное количество побед. Дерево вероятностей позволяет оценить этот риск.

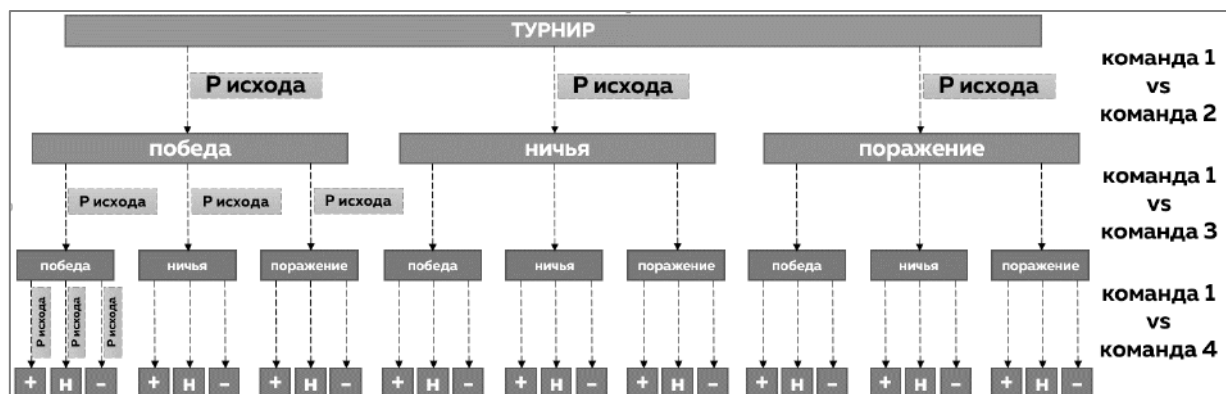
**Этап 3. Групповая работа**

**Методическая функция:** построение дерева вероятностей и вычисление вероятности сложного события.

**Деятельность учителя:** учитель делит класс на 4 группы. Каждая группа получает одну команду и строит дерево вероятностей для её матчей.

### Задание 1.

Для своей команды постройте дерево вероятностей всех возможных исходов трёх матчей (каждый матч имеет три исхода: победа, ничья, поражение).



### Задание 2.

- 1) Найдите вероятность каждого из 27 возможных исходов для своей команды.
- 2) Определите, какие исходы являются благоприятными (команда выходит в финал – не менее 2 побед).
- 3) Найдите вероятность выхода в финал для своей команды.



 **Обобщающий конструктор (синтез):** дерево вероятностей позволяет наглядно представить все 27 возможных исходов турнира для одной команды. Каждая ветвь – это один путь: три матча, три исхода в каждом. Вероятность пути – произведение вероятностей вдоль ветви. Сумма вероятностей всех ветвей равна 1. Чтобы найти вероятность выхода в финал, мы выделяем все ветви, где команда одержала не менее двух побед, и складываем их вероятности.

### Задание 3.

Заполните сводную таблицу на доске (учитель фиксирует результаты групп):

| Команда  | Вероятность выхода в финал |
|----------|----------------------------|
| <b>A</b> |                            |
| <b>Б</b> |                            |
| <b>В</b> |                            |
| <b>Г</b> |                            |

#### *Задание 4. Влияние первого матча*

Для вашей команды ответьте на вопросы:

- 1) Какова вероятность выхода в финал, если команда выиграла первый матч? (Подсказка, если учащиеся затрудняются: зафиксируйте победу в первом матче и пересчитайте вероятность для оставшихся двух игр – нужно выиграть хотя бы одну из них)

- 2) Какова вероятность выхода в финал, если команда проиграла первый матч?  
(Подсказка, если учащиеся затрудняются: зафиксируйте поражение в первом матче – теперь нужно выиграть обе оставшиеся игры)
- 3) Сравните эти вероятности. Что вы можете сказать о важности первого матча?

**Методический комментарий:** после того как группы выполнили вычисления, учитель организует обсуждение вопросов. Важно, чтобы ученики не просто называли числа, а сделали вывод о важности первого матча.

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Насколько сильно первый матч влияет на шансы команды?
- 2) У всех команд это влияние одинаково? Или у кого-то оно больше?
- 3) Как вы думаете, почему в реальном спорте первый матч часто называют «ключевым»?
- 4) Если бы вы были тренером, на что бы вы делали упор в подготовке к первому матчу?

**Этап 4. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Сравнение вероятностей и формулировка вывода о роли дерева вероятностей.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

**Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какая команда имеет наибольшую вероятность выхода в финал? Совпало ли это с вашей интуицией?
- 2) Почему команда А, которая является явным фаворитом, имеет вероятность выхода в финал всего 45%? Что мешает ей выйти в финал?
- 3) Какие исходы было бы легко пропустить без дерева вероятностей?
- 4) В чём сила дерева вероятностей как графического метода? Что он даёт такого, чего не даёт просто список всех 27 вариантов?



**Обобщающий конструкт (синтез):** дерево вероятностей – это не просто картинка. Это мощный инструмент, который позволяет увидеть все возможные исходы сложного многошагового эксперимента. В нашем случае мы построили дерево для трёх матчей (по 3 исхода в каждом – всего 27 ветвей). Это помогло нам не запутаться и правильно вычислить вероятности. Без дерева было бы легко ошибиться или пропустить какие-то исходы.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** в реальной жизни мы часто сталкиваемся с ситуациями, где нужно оценить вероятность сложного события (успех проекта, победа в турнире, достижение цели). Дерево

вероятностей помогает структурировать информацию и принять обоснованное решение.

### **Этап 5. Рефлексия**

- 1) В каких реальных ситуациях (например, в бизнесе, спорте, планировании, медицине) можно применить дерево вероятностей? *Приведите пример.*
- 2) Что было самым важным для вас на этом уроке – построить дерево, вычислить вероятности или понять, что даже сильная команда не гарантирует победу?

**11 класс. Урок 27. Вычисление вероятностей событий с применением графических методов: координатная прямая, дерево, диаграмма Эйлера. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/-3XiYQGRB1NZ8w>**



**11 класс. Урок 27. Вычисление вероятностей событий с применением графических методов: координатная прямая, дерево, диаграмма Эйлера**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с исходными данными;
- дерево случайного эксперимента;
- ответы для учителя.

## 11 класс. Урок 28. Случайные величины и распределения

**Методическая цель урока:** создать условия для систематизации знаний учащихся о показательном и биномиальном распределениях через решение практической задачи выбора производственного оборудования, демонстрирующей, как вероятностные модели позволяют оценивать не только средние показатели, но и риски, связанные с отклонениями от среднего.

**Ключевое обобщение:** показательное и биномиальное распределения описывают разные типы случайных величин: первое – время до события (непрерывное), второе – число успехов в серии испытаний (дискретное). Для каждого распределения существуют свои формулы для вычисления вероятностей, математического ожидания и дисперсии. Однако главная ценность вероятностных моделей – не в расчёте средних значений, а в оценке рисков: какова вероятность того, что реальный сценарий окажется хуже ожидаемого? Именно это позволяет принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о показательном и биномиальном распределениях, их свойствах и применении.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Какие распределения случайных величин вы знаете?
- 2) Что такое показательное распределение? Какую случайную величину оно описывает? Какой параметр его задаёт?
- 3) Что такое биномиальное распределение? Какую случайную величину оно описывает? Какие параметры его задают?
- 4) Как найти математическое ожидание для показательного распределения? А для биномиального?
- 5) Как найти вероятность  $P(T > t)$  для показательного распределения?
- 6) Как найти вероятность  $P(X = k)$  для биномиального распределения?

#### Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта – противоречие между более высокой средней прибылью и вероятностью неудачного сценария.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

**Задание для учащихся:**

На заводе нужно закупить станок для производства деталей. Есть два варианта.

**Станок А:**

- Цена: 5 000 000 руб.
- Производительность: 80 деталей в час.
- Время работы до поломки – показательное распределение со средним 1000 часов.
- Ремонт одной поломки: 50 000 руб. и 10 часов простоя.
- Вероятность брака одной детали: 0,01.
- Утилизация бракованной детали: 200 руб. за штуку.

**Станок Б:**

- Цена: 2 000 000 руб.
- Производительность: 100 деталей в час.
- Время работы до поломки – показательное распределение со средним 300 часов.
- Ремонт одной поломки: 80 000 руб. и 40 часов простоя.
- Вероятность брака одной детали: 0,06.
- Утилизация бракованной детали: 200 руб. за штуку.

**Условия работы:**

- Станок работает 2000 часов в год.
- Каждая годная деталь продаётся за 75 руб.
- За время ремонта станок не производит детали.

**Проблемный вопрос:** какой станок выгоднее купить? Учитывайте не только ожидаемую прибыль, но и риски.

**Задание для учащихся:**

- 1) Что важнее при выборе – средняя прибыль или вероятность неудачного сценария?
- 2) Как вы думаете, может ли быть так, что станок Б выгоднее в среднем, но в некоторых случаях оказывается хуже станка А?

**Этап 3. Основная работа**

**Методическая функция:** применение формул показательного и биномиального распределений для оценки прибыли и рисков.

**Методический комментарий:** объемные вычисления в этой задаче не являются самоцелью (но важны перед сдачей единого государственного экзамена). Они позволяют количественно оценить разницу между станками и перейти от качественного сравнения («станок Б быстрее, но ненадёжнее») к количественному («станок Б даёт на 1,16 млн руб. больше прибыли, но с



вероятностью 8% оказывается хуже»). Без вычислений оценка риска была бы невозможна.

### **Задание 1.**

Рассчитайте прибыль для станка А.

#### **Данные для учителя:**

Число поломок за 2000 часов имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda = 2000 / 1000 = 2$ .

Найдите ожидаемую прибыль для станка А при **среднем числе поломок** ( $E(K) = 2$ ).

#### **Решение:**

Поломки: 2

Ремонт:  $2 \times 50\,000 = 100\,000$  руб.

Простой:  $2 \times 10 = 20$  ч

Деталей:  $80 \times (2000 - 20) = 158\,400$

Брак:  $1\% \rightarrow 1\,584$  шт.

Утилизация:  $1\,584 \times 200 = 316\,800$  руб.

Годные:  $158\,400 - 1\,584 = 156\,816$

Доход:  $156\,816 \times 75 = 11\,761\,200$  руб.

**Прибыль:**  $11\,761\,200 - 5\,000\,000 - 100\,000 - 316\,800 = 6\,344\,400$  руб.

### **Задание 2.**

Рассчитайте прибыль для станка Б.

#### **Данные для учителя:**

Число поломок за 2000 часов имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda = 2000 / 300 \approx 6,67$ .

Найдите ожидаемую прибыль для станка Б при **среднем числе поломок** ( $E(K) = 6,67$ , округляем до 7 для расчёта).

#### **Решение:**

Поломки: 7

Ремонт:  $7 \times 80\,000 = 560\,000$  руб.

Простой:  $7 \times 40 = 280$  ч

Деталей:  $100 \times (2000 - 280) = 172\,000$

Брак:  $6\% \rightarrow 172\,000 \times 0,06 = 10\,320$  шт.

Утилизация:  $10\,320 \times 200 = 2\,064\,000$  руб.

Годные:  $172\,000 - 10\,320 = 161\,680$

Доход:  $161\,680 \times 75 = 12\,126\,000$  руб.

**Прибыль:**  $12\,126\,000 - 2\,000\,000 - 560\,000 - 2\,064\,000 = 7\,502\,000$  руб.

#### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какой станок даёт большую прибыль в среднем?
- 2) Как вы думаете, почему станок Б, несмотря на более частые поломки и больший брак, даёт большую прибыль?

3) Какие риски связаны с выбором станка Б?

**Задание 3.**

Найдите минимальное число поломок  $K$ , при котором прибыль станка Б становится **меньше** прибыли станка А.

**Данные для учителя:**

Прибыль станка Б как функция от числа поломок  $K$ :

$$\text{Прибыль}(K) = \text{Доход}(K) - 2\,000\,000 - 80\,000 \cdot K - \text{Утилизация}(K)$$

Где:

$$\text{Доход}(K) = 75 \cdot (100 \cdot (2000 - 40K) \cdot 0,94) = 75 \cdot (188\,000 - 3760K) = 14\,100\,000 - 282\,000K$$

$$\text{Утилизация}(K) = 200 \cdot (100 \cdot (2000 - 40K) \cdot 0,06) = 200 \cdot (12\,000 - 240K) = 2\,400\,000 - 48\,000K$$

$$\text{Прибыль}(K) = (14\,100\,000 - 282\,000K) - 2\,000\,000 - 80\,000K - (2\,400\,000 - 48\,000K)$$

$$= 14\,100\,000 - 282\,000K - 2\,000\,000 - 80\,000K - 2\,400\,000 + 48\,000K$$

$$= 9\,700\,000 - 314\,000K$$

Приравниваем к прибыли станка А:

$$9\,700\,000 - 314\,000K = 6\,344\,400$$

$$314\,000K = 3\,355\,600$$

$$K \approx 10,69$$

**Ответ:** при  $K \geq 11$  поломок станок Б становится **менее выгодным**, чем станок А.

**Задание 4.**

Найдите вероятность того, что станок Б окажется хуже станка А.

**Данные для учителя:**

Число поломок станка Б имеет распределение Пуассона с  $\lambda = 6,67$ .

Найдите  $P(K \geq 11)$ .

**Решение:**

$$P(K \geq 11) = 1 - P(K \leq 10)$$

$$\text{При } \lambda = 6,67, P(K \leq 10) \approx 0,92.$$

$$P(K \geq 11) = 1 - 0,92 = \mathbf{0,08}$$

**Методический комментарий:** вычисление  $P(K \leq 10)$  по формуле Пуассона требует суммирования 11 слагаемых. Для экономии времени на уроке рекомендуется использовать электронные таблицы (функция ПУАССОН.РАСП) или готовые таблицы распределения Пуассона. Это позволяет сосредоточиться на интерпретации результата, а не на трудоёмких расчётах.

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Как вы думаете, риск 8% – это много или мало? Стоит ли ради большей прибыли (7,5 млн руб. против 6,34 млн руб.) рискнуть 8% вероятностью того, что станок Б окажется хуже?
- 2) Какой станок вы бы выбрали, если бы вы были директором завода? Почему?



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** мы нашли вероятность того, что станок Б окажется хуже станка А – 8%. Это означает, что в 92% случаев станок Б будет выгоднее, но в 8% случаев – нет. Без расчёта этой вероятности мы бы не могли оценить риск. Именно это и даёт вероятностная модель – она позволяет не просто сравнить средние, а понять, насколько велик риск неудачного сценария.

### Задание 5.

Завод должен производить не менее 95% годных деталей за смену. Если бракованных деталей будет 6% или больше, план не выполняется. Какова вероятность того, что за смену план не будет выполнен для каждого станка?

**Методический комментарий:** для вычисления вероятностей в Задании 5 также рекомендуется использовать электронные таблицы (функция БИНОМ.РАСП). Ручной подсчёт по формуле биномиального распределения для шести значений  $k$  требует значительных временных затрат (вычисление факториалов, степеней). Использование таблиц позволяет сосредоточиться на сравнении рисков и интерпретации результатов, а не на технических расчётах.



**Обобщающий конструкт (синтез):** биномиальное распределение позволило нам оценить риск невыполнения производственного плана. Оказалось, что у станка А этот риск практически отсутствует, а у станка Б – очень высокий. Это ещё один аргумент в пользу станка А, который не был виден при расчёте средней прибыли.

### Этап 4. Презентация и обобщение

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Сравнение рисков и формулировка вывода о роли вероятностных моделей в принятии решений.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### Вопросы для общего обсуждения:

- 1) Какой станок вы бы выбрали? Почему?
- 2) Что для вас важнее – более высокая ожидаемая прибыль (7,5 млн руб.) или меньший риск (вероятность неудачи 8%)?

3) Как связаны между собой два вида риска – риск большого числа поломок и риск невыполнения плана по браку? Какой из этих рисков, на ваш взгляд, более критичен для завода?

4) Как вы думаете, какие ещё факторы, кроме прибыли и риска, могли бы повлиять на решение о покупке станка?

5) Какой главный вывод вы можете сделать о применении вероятностных моделей в реальной жизни?



**Обобщающий конструкт (синтез):** в задаче станок Б даёт большую прибыль в среднем, но с вероятностью 8% оказывается хуже станка А. Это позволяет принять осознанное решение: готовы ли мы рискнуть ради большей прибыли.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** вероятностные модели позволяют не просто гадать, а оценивать шансы и принимать обоснованные решения. В реальной жизни мы постоянно сталкиваемся с выбором между более высокой прибылью и меньшим риском. Математика даёт инструменты для этого выбора.

## Этап 5. Рефлексия

1) Какой результат вас удивил больше всего? Почему?

2) Что было самым сложным – расчёт прибыли, работа с распределениями или интерпретация вероятностей?

3) Как вы думаете, в каких других сферах жизни (кроме выбора оборудования) можно применять вероятностные модели для оценки рисков?

4) Что было самым важным для вас на этом уроке – научиться считать вероятности, понять связь между вероятностью и прибылью или осознать, как математика помогает принимать решения?

## **11 класс. Урок 28. Случайные величины и распределения. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**[https://disk.yandex.ru/d/\\_d84m\\_VZrcaoCA](https://disk.yandex.ru/d/_d84m_VZrcaoCA)**



**11 класс. Урок 28. Случайные величины и распределения**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с исходными данными;
- ответы для учителя.

## 11 класс. Урок 29-30. Математическое ожидание случайной величины

**Методическая цель уроков:** создать условия для систематизации знаний учащихся о математическом ожидании, дисперсии, ковариации и корреляции через решение практической задачи анализа связи между временем подготовки к ЕГЭ и результатом экзамена, демонстрирующей, как вероятностно-статистические инструменты позволяют выявлять связи между явлениями и принимать обоснованные решения.

**Ключевое обобщение:** математическое ожидание даёт средние значения, дисперсия – меру разброса. Ковариация показывает направление связи между двумя случайными величинами, а коэффициент корреляции – её силу. Линейная регрессия позволяет предсказывать одну величину по другой. Все эти инструменты работают вместе: математическое ожидание – это фундамент, на котором строятся ковариация, корреляция и регрессия. Но важно помнить: корреляция не равна причинности.

### Пошаговый сценарий уроков

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о математическом ожидании, дисперсии, выборочных характеристиках.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое математическое ожидание случайной величины? Что оно показывает?
- 2) Что такое дисперсия? Что она показывает?
- 3) Что такое выборочное среднее? Чем оно отличается от математического ожидания?
- 4) Как вы думаете, можно ли по выборке оценить математическое ожидание и дисперсию генеральной совокупности?
- 5) Как вы думаете, есть ли связь между временем, которое вы тратите на подготовку к ЕГЭ, и вашим результатом? Как это можно проверить?

#### Этап 2. Постановка проблемы и сбор данных

**Методическая функция:** создание мотивации через работу с личными данными.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и организует сбор данных.

### Задание для учащихся:

Мы знаем, что математическое ожидание – это среднее значение случайной величины. Но в реальной жизни мы редко знаем истинное распределение – мы работаем с выборкой. Сегодня мы соберём свою выборку и проверим гипотезу: есть ли связь между временем подготовки к ЕГЭ и результатом подготовки к экзамену?

Каждый ученик записывает на листочке (или в общую таблицу) свои данные:

$X$  – сколько часов в неделю вы тратите на подготовку к ЕГЭ по математике (в среднем за последний месяц).

$Y$  – ваш средний балл за последние тренировочные тестирования (или последнее ТТ).

**Методический комментарий:** учитель собирает данные в общую таблицу на доске или в электронной таблице, проецируя её на экран. Учитель обращает внимание на то, что данные анонимны.

**Проблемный вопрос:** есть ли связь между временем подготовки к ЕГЭ и результатом подготовки к экзамену?

### Этап 3. Основная работа

**Методическая функция:** применение формул математического ожидания и дисперсии к реальным данным.

#### Задание 1.

- 1) Используя общую таблицу данных, вычислите выборочное среднее времени подготовки  $\bar{X}$ .
- 2) Вычислите выборочное среднее балла  $\bar{Y}$ .
- 3) Вычислите выборочную дисперсию времени подготовки  $S_X^2$ .
- 4) Вычислите выборочную дисперсию балла  $S_Y^2$ .

#### Вопросы для обсуждения:

- 1) Какое среднее время подготовки в классе? Много это или мало?
- 2) Какой средний балл в классе?
- 3) У кого время подготовки больше среднего? У кого меньше?
- 4) У кого балл выше среднего? У кого ниже?
- 5) Есть ли, на ваш взгляд, связь между временем подготовки и баллом? Как вы это определили?



**Обобщающий конструкт (перевод):** мы перевели данные из таблицы (сырые числа) в статистические характеристики (средние и дисперсии). Теперь мы можем описать время подготовки и баллы с помощью чисел: сколько в среднем готовятся, какой средний балл, насколько сильно различаются ученики. Но эти характеристики описывают каждую величину по отдельности.

Чтобы понять, связаны ли они между собой, нужны другие инструменты – ковариация и корреляция.

#### Этап 4. Актуализация (перед уроком 30).

**Методическая функция:** выявление имеющихся знаний о ковариации, корреляции и регрессии.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

##### Вопросы:

- 1) Что такое ковариация? Что она показывает?
- 2) Что такое коэффициент корреляции? Что он показывает? В каких пределах он находится?
- 3) Что означает положительная корреляция? Отрицательная?
- 4) Что такое уравнение линейной регрессии? Для чего оно используется?
- 5) Можно ли по коэффициенту корреляции определить причинно-следственную связь?

#### Этап 5. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта.

**Деятельность учителя:** учитель вводит задачу.

##### Задание для учащихся:

В прошлый раз мы вычислили средние значения и дисперсии для времени подготовки и балла. Но это не ответило на главный вопрос: *связаны ли эти величины между собой?* Возможно, те, кто много готовится, действительно получают высокие баллы. А возможно, связь слабая – или даже отрицательная (если кто-то перегорает или готовится неэффективно).

#### Этап 6. Основная работа

**Методическая функция:** применение формул ковариации, корреляции и регрессии к реальным данным.

##### Задание 1.

Используя данные из прошлого урока, вычислите:

- 1)  $E(XY)$  – среднее произведение времени подготовки и балла.
- 2)  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  – ковариацию.
- 3)  $\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$  – коэффициент корреляции.
- 4) Определите:
  - Направление связи (положительная или отрицательная).



- Силу связи (сильная, средняя, слабая или отсутствует).

### **Задание 2.**

Постройте уравнение линейной регрессии  $Y$  от  $X$ .

**Методический комментарий:**  $a = \frac{Cov(X,Y)}{D(X)}$ ,  $b = E(Y) - aE(X)$

### **Задание 3.**

Используя уравнение регрессии, предскажите балл для ученика, который готовится:

- 5 часов в неделю.
- 10 часов в неделю.
- 0 часов в неделю.

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Есть ли связь между временем подготовки и баллом в вашем классе? Насколько она сильна?
- 2) Можно ли утверждать, что время подготовки влияет на балл? Почему?
- 3) Какие ещё факторы могли повлиять на результат?



**Обобщающий конструкт (синтез):** мы использовали три инструмента для анализа связи между временем подготовки и баллом. Ковариация показала направление связи, коэффициент корреляции – её силу, а линейная регрессия позволила предсказывать балл по времени подготовки. Вместе они дают полную картину: есть ли связь, насколько она сильна, и как одна величина зависит от другой. Но важно помнить: корреляция не равна причинности. Даже если связь есть, это не значит, что время подготовки вызывает высокий балл – возможно, есть другие факторы.

## **Этап 7. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какая связь между временем подготовки и баллом получилась в вашем классе?
- 2) Совпало ли это с вашими ожиданиями?
- 3) Почему связь может быть слабой или даже отрицательной?
- 4) Можно ли утверждать, что время подготовки влияет на балл? Почему?
- 5) Какие ещё факторы влияют на результат ЕГЭ? (*Исходный уровень знаний, эффективность подготовки, стресс, удача на экзамене*)



**Обобщающий конструкт (синтез):** мы прошли полный путь анализа данных: от сбора данных до построения регрессии. Мы использовали математическое ожидание для описания средних значений, дисперсию для описания разброса, ковариацию для определения направления связи, корреляцию для оценки её силы и регрессию для предсказания. Все эти инструменты работают вместе, дополняя друг друга.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** Математическое ожидание, дисперсия, ковариация и корреляция – это инструменты для анализа реальных данных. Они помогают понять, что происходит в окружающем мире, выявить скрытые связи и принимать обоснованные решения. В нашей задаче мы проверили гипотезу о связи между подготовкой и результатом. Возможно, связь оказалась не такой сильной, как мы ожидали. Но это само по себе важный результат: он показывает, что на результат ЕГЭ влияет множество факторов, и время подготовки – лишь один из них.

### **Этап 8. Рефлексия**

- 1) Какой результат вас удивил больше всего?
- 2) Что было самым сложным в этом анализе?
- 3) Как вы думаете, где ещё в жизни можно применять эти инструменты?
- 4) Что было самым важным для вас на этих двух уроках?

## 11 класс. Урок 32. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов

**Методическая цель урока:** создать условия для перехода учащихся от решения учебных вероятностных задач к самостоятельному анализу реальных данных, демонстрируя, как частотный анализ, условные вероятности и графические методы позволяют выявлять закономерности и делать обоснованные выводы на основе реальной информации из открытых источников.

**Ключевое обобщение:** все инструменты, изученные в курсе «Вероятность и статистика» – частота, вероятность, условная вероятность, гистограммы, диаграммы – работают не только в учебных задачах, но и в реальной жизни. Реальные данные сложнее: они содержат шум, выбросы, скрытые зависимости. Но именно это делает их анализ интересным и полезным. Переход от учебных задач к реальным данным – это новый уровень вероятностно-статистического мышления.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** восстановление в памяти ключевых понятий и инструментов, необходимых для анализа данных.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Какими инструментами мы пользовались в курсе «Вероятность и статистика» для анализа данных?
- 2) Как по реальным данным оценить вероятность события?
- 3) Что такое условная вероятность? Как её вычислить на основе данных?
- 4) Какие графические способы представления данных вы знаете? Что каждый из них показывает?
- 5) В чём, по вашему мнению, отличие учебных задач по вероятности от анализа реальных данных?

#### Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание мотивации через работу с реальными данными из личного опыта.

**Деятельность учителя:** учитель объясняет, откуда берутся данные и как с ними работать.

### **Задание для учащихся:**

До этого урока вы решали задачи, где условие было сформулировано за вас: известны вероятности, нужно найти вероятность события. Сегодня мы делаем шаг вперёд. Мы будем работать с реальными погодными данными из открытого архива. Данные собирают метеостанции по всему миру, и они доступны бесплатно в открытом доступе.

Мы скачаем данные по нашему городу за последние 3 года. Это около 1000 наблюдений. Наша задача – проанализировать эти данные и ответить на некоторые вопросы. Для этого мы используем инструменты, которые изучили в курсе: частоту, условную вероятность, гистограммы и диаграммы.

**Проблемный вопрос:** у нас нет готового алгоритма. Мы сами решаем, что считать, какие графики строить и какие закономерности искать. Именно так работают с данными в реальной жизни.



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** в учебных задачах всё уже подготовлено для решения. В реальной жизни данных много, они шумные, и нужно самому решать, что с ними делать. Умение работать с неструктурированными данными – это навык, который выносится за рамки школьного курса. Именно к этому мы переходим сегодня.

### **Этап 3. Основная работа**

**Методическая функция:** применение изученных инструментов к реальным данным, самостоятельное исследование.

**Деятельность учителя:** учитель, совместно с учащимися создают файл с погодными данными (за последние 3 года своего города). Ученики работают в Excel (индивидуально или в парах). Если компьютерного класса нет, учитель показывает действия на проекторе, ученики работают в тетрадях.

**Методический комментарий:** алгоритм получения метеоданных:

- 1) На сайте [rp5.ru](http://rp5.ru) в строке поиска введите название своего города.
- 2) В разделе «Архив погоды» → «Скачать архив погоды».
- 3) Выбрать необходимый период.
- 4) Скачать архив в формате .gz или .zip → распаковать → открывать в Excel.

### Задание 1.

Изучите условные обозначения в таблице:

| Обозначение | Что означает                                                             | Единицы измерения     |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| <b>T</b>    | Температура воздуха на высоте 2 м над поверхностью земли                 | °C                    |
| <b>Po</b>   | Атмосферное давление на уровне станции                                   | мм рт. ст.            |
| <b>P</b>    | Атмосферное давление, приведённое к среднему уровню моря                 | мм рт. ст.            |
| <b>U</b>    | Относительная влажность воздуха на высоте 2 м                            | %                     |
| <b>DD</b>   | Направление ветра на высоте 10–12 м (осреднённое за 10 минут)            | румбы (стороны света) |
| <b>Ff</b>   | Средняя скорость ветра на высоте 10–12 м (за 10 минут)                   | м/с                   |
| <b>ff10</b> | Максимальный порыв ветра за 10 минут перед сроком наблюдения             | м/с                   |
| <b>ff3</b>  | Максимальный порыв ветра за период между сроками наблюдений              | м/с                   |
| <b>Tn</b>   | Минимальная температура воздуха за прошедший период (не более 12 часов)  | °C                    |
| <b>Tx</b>   | Максимальная температура воздуха за прошедший период (не более 12 часов) | °C                    |
| <b>Td</b>   | Температура точки росы на высоте 2 м                                     | °C                    |

Вот ещё несколько столбцов из вашего файла, которые могут пригодиться:

| Обозначение   | Что означает                           |
|---------------|----------------------------------------|
| <b>N</b>      | Общая облачность (в баллах)            |
| <b>WW</b>     | Текущая погода в срок наблюдения (код) |
| <b>W1, W2</b> | Прошедшая погода между сроками (коды)  |
| <b>VV</b>     | Горизонтальная дальность видимости     |
| <b>H</b>      | Высота основания самых низких облаков  |
| <b>RRR</b>    | Количество выпавших осадков            |
| <b>sss</b>    | Высота снежного покрова                |

### Задание 2.

- 1) Подсчитайте общее количество дней в выборке.
- 2) Подсчитайте количество дней с дождём, со снегом, без осадков.
- 3) Вычислите частоты (эмпирические вероятности):
  - P(дождь)
  - P(снег)
  - P(без осадков)
- 4) Постройте круговую диаграмму, показывающую структуру осадков.

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Какова вероятность дождя в случайный день в вашем городе?
- 2) Какой тип погоды встречается чаще всего?
- 3) Совпадает ли это с вашими ожиданиями? Что удивило?

### Задание 3.

1) Вычислите:

- $P(\text{дождь} \mid \text{июль})$
- $P(\text{дождь} \mid \text{декабрь})$
- $P(\text{дождь} \mid \text{температура} > 20^\circ)$
- $P(\text{дождь} \mid \text{температура} \leq 0^\circ)$

2) Что можно сказать о связи между температурой и вероятностью дождя?

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Почему вероятность дождя в июле отличается от вероятности дождя в декабре?
- 2) Что показывает условная вероятность, чего не показывает обычная?

### Задание 4.

Заполните таблицу:

| Месяц   | Количество дней | Количество дождливых дней | Доля дождливых дней | Средняя температура |
|---------|-----------------|---------------------------|---------------------|---------------------|
| Январь  |                 |                           |                     |                     |
| Февраль |                 |                           |                     |                     |
| ...     |                 |                           |                     |                     |
| Декабрь |                 |                           |                     |                     |

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Какой месяц оказался самым дождливым? А каким вы ожидали его видеть?
- 2) Есть ли месяцы, в которых дождь почти никогда не идёт?
- 3) Какой месяц, по данным, самый тёплый? Совпадает ли он с самым дождливым?

### Задание 5.

Постройте гистограмму распределения температур (интервал  $5^\circ\text{C}$ ).

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Какая температура является самой типичной для вашего города?
- 2) Почему на гистограмме может быть два пика? Что они означают?
- 3) Как, глядя на гистограмму, оценить вероятность того, что температура в случайный день будет выше  $20^\circ\text{C}$ ?

## Этап 4. Презентация и обобщение

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание. Осознание перехода на новый уровень работы с данными.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какие закономерности вы обнаружили в данных? Что было неожиданным? Как вы думаете, какие ограничения есть у этого анализа? Почему нельзя на основе этих данных делать долгосрочные прогнозы?
- 2) Какой из графиков оказался самым полезным? Почему?
- 3) Как вы думаете, почему реальные данные отличаются от учебных задач? Что в них сложнее?
- 4) Какие выводы на основе этих данных можно было бы использовать на практике? (Планирование поездок, сельское хозяйство, туризм)
- 5) Что изменилось в вашем понимании вероятности после работы с реальными данными?
- 6) Где в жизни и работе люди ежедневно анализируют такие данные?



**Обобщающий конструкт (синтез):** мы прошли путь от учебных задач к реальным данным. Учебные задачи имеют готовые ответы и чёткие условия. Реальные данные шумные, неполные и требуют самостоятельного принятия решений: что считать, какие графики строить, какие закономерности искать. Мы использовали все инструменты, изученные в курсе: частотный анализ, условные вероятности, гистограммы, круговые диаграммы. Оказалось, что эти инструменты отлично работают на реальных данных – они помогают увидеть закономерности, которые не видны глазу, и проверять интуицию.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** курс «Вероятность и статистика» заканчивается, но навыки работы с данными только начинают применяться. Именно этот навык – анализ данных, поиск закономерностей, проверка гипотез – будет нужен вам в дальнейшей жизни независимо от выбранной профессии.

### **Этап 5. Рефлексия**

- 1) Что изменилось в вашем понимании вероятности после работы с реальными данными?
- 2) Что было самым сложным в этом исследовании – техническая работа в Excel, интерпретация данных или формулировка выводов?
- 3) Какие ещё данные (не только погодные) можно анализировать с помощью тех же инструментов?
- 4) Что было самым важным для вас на этом уроке?

## **11 класс. Урок 32. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов. Материалы к уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/2cgUxxlaGROlug>**



**11 класс. Урок 32. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов**

Материалы к уроку включают в себя:

- слайд с условными обозначениями;
- таблица для заполнения.



## 11 класс. Урок 33. Вычисление вероятностей событий с применением формул и графических методов

**Методическая цель урока:** создать условия для применения учащимися корреляционного анализа и регрессионного моделирования к реальным демографическим данным, демонстрируя, как статистические методы позволяют выявлять связи между социально-экономическими показателями и принимать обоснованные решения на основе данных.

**Ключевое обобщение:** корреляция показывает наличие и направление связи между двумя величинами, коэффициент корреляции – её силу. Линейная регрессия позволяет предсказывать значения одной величины по другой. Однако корреляция не равна причинности: даже если два показателя связаны, это не значит, что один является причиной другого. В реальных данных всегда есть третьи, скрытые переменные, которые могут объяснять наблюдаемую связь. Умение различать статистическую связь и причинно-следственную зависимость – один из важнейших навыков современного человека.

### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Актуализация

**Методическая функция:** восстановление в памяти ключевых понятий корреляционного анализа.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

#### Вопросы:

- 1) Что такое ковариация? Что она показывает?
- 2) Что такое коэффициент корреляции? В каких пределах он находится?
- 3) Что означает положительная корреляция? Отрицательная?
- 4) Что такое уравнение линейной регрессии? Для чего оно используется?
- 5) Можно ли по коэффициенту корреляции определить причинно-следственную связь?

#### Этап 2. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

### Задание для учащихся:

В интернете, в новостях, в разговорах мы часто слышим утверждения, которые звучат убедительно, но не всегда подтверждаются данными. Вот одно из них:

*«В регионах с высокой зарплатой люди живут дольше и реже болеют. Значит, чтобы поднять продолжительность жизни, надо поднимать зарплаты».*

или другое:

*«Чем больше больниц в регионе, тем выше смертность – значит, больницы не помогают, а только создают видимость заботы».*

### Задание для учащихся:

- 1) Как вы думаете, есть ли связь между зарплатой и продолжительностью жизни?
- 2) А между количеством больниц и смертностью?
- 3) Как вы думаете, почему в регионах с большим количеством больниц смертность может быть выше? Что здесь может быть скрыто?

**Проблемный вопрос:** мы проверим эти утверждения на реальных данных. Но будьте готовы: результат может оказаться не таким, как вы ожидаете. И главное – даже если корреляция есть, это ещё не значит, что одно является причиной другого.



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуитивно кажется, что связь между зарплатой и продолжительностью жизни очевидна. Но что, если на самом деле продолжительность жизни зависит не от зарплаты, а от чего-то другого? Только анализ данных даёт точный ответ.

## Этап 3. Основная работа

**Методическая функция:** применение корреляционного анализа к реальным данным.

**Деятельность учителя:** учитель, совместно с учащимися, находит и загружает данные о регионах России из открытого источника. Ученики работают в Excel (индивидуально или в парах). Если компьютерного класса нет, учитель показывает действия на проекторе, ученики работают в тетрадях.

**Методический комментарий:** алгоритм получения демографических данных:

- 1) Зайдите на сайт Росстата [rosstat.gov.ru](http://rosstat.gov.ru).
- 2) Выберите раздел с данными:
  - «Население» → «Демография» → «Естественное движение населения» → выберите нужный год.
- 3) Выберите показатели для анализа:
  - Рождаемость (на 1000 человек).
  - Смертность (на 1000 человек).
  - Средняя заработная плата (тыс. руб.).

- Количество больниц.
- Уровень преступности.
- Доля городского населения (%).

4) Скопируйте данные в Excel. Приведите данные к единому формату.

Если поиск данных вызовет затруднение, то можно использовать готовый датасет, который учитель заранее подготовил (или можно найти актуальные датасеты в интернете). Однако рекомендуется показать ученикам процесс получения данных – это важная часть обучения работе с информацией.

### **Задание 1.**

- 1) С помощью функции =КОРРЕЛ() вычислите коэффициент корреляции между:
  - средней зарплатой и рождаемостью;
  - средней зарплатой и смертностью.
- 2) Запишите полученные коэффициенты.
- 3) Определите:
  - направление связи (*положительная / отрицательная*);
  - силу связи (*сильная, средняя, слабая или отсутствует*).

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Есть ли связь между зарплатой и рождаемостью? Какая?
- 2) Есть ли связь между зарплатой и смертностью? Какая?
- 3) Совпало ли это с вашими ожиданиями? Что удивило?

### **Задание 2.**

- 1) С помощью функции =КОРРЕЛ() вычислите коэффициент корреляции между количеством больниц и смертностью.
- 2) Запишите полученный коэффициент.
- 3) Определите направление и силу связи.

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какая связь между количеством больниц и смертностью?
- 2) Как вы думаете, почему она может быть именно такой?
- 3) Означает ли это, что больницы «вредны»? Что ещё может объяснять эту связь?

### **Задание 3.**

- 1) Постройте точечную диаграмму для пары «Количество больниц → Смертность».
- 2) Добавьте линию тренда и уравнение регрессии.
- 3) Запишите уравнение регрессии:  $y = ax + b$ .

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Что показывает линия тренда?
- 2) Если коэффициент  $a$  положительный, что это означает?

3) Можно ли по этому уравнению предсказать смертность в регионе, где 300 больниц?

#### **Задание 4.**

1) Вычислите средние показатели по федеральным округам.

2) Заполните таблицу:

| Федеральный округ | Средняя зарплата | Рождаемость | Смертность |
|-------------------|------------------|-------------|------------|
| Центральный       |                  |             |            |
| Северо-Западный   |                  |             |            |
| Южный             |                  |             |            |
| Северо-Кавказский |                  |             |            |
| Приволжский       |                  |             |            |
| Уральский         |                  |             |            |
| Сибирский         |                  |             |            |
| Дальневосточный   |                  |             |            |

#### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какой округ лидирует по зарплате?
- 2) Какой округ лидирует по смертности?
- 3) Есть ли связь между округом и уровнем жизни?

 **Обобщающий конструкт (синтез):** группировка данных по федеральным округам позволяет увидеть региональные различия. Оказывается, что средние показатели сильно различаются по округам. Например, в одних округах высокая зарплата сочетается с низкой смертностью, а в других – нет. Это показывает, что связь между показателями не универсальна и зависит от региональных особенностей.

#### **Этап 4. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

#### **Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какой результат вас удивил больше всего? Почему?
- 2) Какие скрытые переменные могут объяснять связь между зарплатой и смертностью? А между количеством больниц и смертностью? Чем эти случаи похожи?
- 3) Можно ли утверждать, что «высокая зарплата продлевает жизнь»? Почему?
- 4) Что такое «скрытая переменная»? *Приведите пример из нашего анализа.*
- 5) Какой главный вывод вы можете сделать о связи статистики и причин?



**Обобщающий конструкт (синтез):** между зарплатой и смертностью действительно есть связь. Но это не значит, что высокая зарплата причина низкой смертности. Возможно, в регионах с высокой зарплатой лучше медицина, выше уровень образования, лучше экология. Это скрытые переменные.

Между количеством больниц и смертностью есть положительная корреляция. Но это не значит, что больницы вредны. Это значит, что в регионах с большим количеством больниц живёт больше пожилых людей, хуже экология, выше заболеваемость.

Корреляция не равна причинности!

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** связь есть, но причина не очевидна. Между зарплатой и смертностью действительно есть корреляция. Но это не значит, что зарплата – причина. Скорее всего, есть скрытые переменные: качество медицины, уровень образования, экология.

Корреляция может быть обманчивой. Положительная корреляция между количеством больниц и смертностью не означает, что больницы «вредны». Она означает, что в регионах с большим количеством больниц живёт больше пожилых людей или хуже экология.

Статистика требует осторожной интерпретации. Главный вывод сегодняшнего урока: корреляция не равна причинности. Умение различать статистическую связь и причинно-следственную зависимость – один из важнейших навыков современного человека.

В реальной жизни мы постоянно сталкиваемся с утверждениями, которые путают одно с другим. Теперь у вас есть инструмент, чтобы проверять такие утверждения на основе данных.

## **Этап 5. Рефлексия**

- 1) Какое утверждение из начала урока вы теперь видите иначе?
- 2) Где в жизни вы сталкиваетесь с ситуацией, когда люди путают корреляцию и причинность?
- 3) Что было самым важным для вас на этом уроке?

## 11 класс. Урок 34. Случайные величины и распределения.

### Математическое ожидание случайной величины

**Методическая цель урока:** создать условия для завершающего обобщения всего курса через самостоятельное исследование данных о фильмах, демонстрируя, как все изученные инструменты работают вместе при анализе реальной информации из личного опыта учащихся.

**Ключевое обобщение:** все инструменты курса «Вероятность и статистика» – частота, вероятность, распределения, математическое ожидание, дисперсия, корреляция, регрессия – работают вместе при анализе реальных данных. Статистика – это не набор изолированных формул, а единая система для принятия решений. Итоговый урок показывает, что статистика работает не только на абстрактных данных, но и на том, что ученики знают и любят. А главное – реальность часто оказывается сложнее, чем кажется: большие бюджеты не гарантируют качества, а кассовые сборы – не показатель любви зрителей.

#### Пошаговый сценарий урока

#### Этап 1. Подготовка (за 2–3 урока до финального)

**Методическая функция:** сбор данных для итогового исследования.

**Деятельность учителя:** учитель объявляет задание заранее.

#### **Задание для учащихся:**

Каждый ученик выбирает 5–10 фильмов, которые он смотрел и которые может оценить *(желательно, чтобы среди них были фильмы разных жанров и разных лет выпуска (не только новинки). Это сделает общую выборку более разнообразной и интересной для анализа)*. Приносит данные на урок по каждому фильму:

- Название фильма.
- Год выпуска.
- Жанр (1–2 основных).
- Бюджет фильма (млн \$) – можно найти на Кинопоиске или IMDb.
- Сборы в прокате (млн \$) – можно найти на Кинопоиске или IMDb.
- Рейтинг на Кинопоиске (или IMDb) – по 10-балльной шкале.
- Своя оценка фильма по шкале 1–10.

## Этап 2. Актуализация

**Методическая функция:** восстановление в памяти всех ключевых инструментов курса.

**Деятельность учителя:** учитель задает вопросы, фиксируя ответы.

### Вопросы:

- 1) Какие инструменты мы изучили в курсе «Вероятность и статистика»?
- 2) Какой инструмент помогает понять среднее значение?
- 3) Какой инструмент показывает разброс?
- 4) Какой инструмент позволяет увидеть связь между величинами?
- 5) Какой инструмент помогает предсказывать значения?
- 6) Какой инструмент показывает распределение данных?

## Этап 3. Постановка проблемы

**Методическая функция:** создание когнитивного конфликта.

**Деятельность учителя:** учитель вводит сюжет и ставит проблемный вопрос.

### Задание для учащихся:

Мы смотрим фильмы. У каждого из нас есть любимые и нелюбимые. У каждого есть представление о том, какой фильм можно считать «хорошим». Но что делает фильм хорошим? Большой бюджет? Высокие сборы? Популярный жанр? Давайте проверим.

У нас есть данные о фильмах, которые вы смотрели. Это не абстрактные цифры из интернета – это ваш личный опыт. Мы объединим их и посмотрим, что на самом деле влияет на то, нравится ли фильм зрителю.

### Вопросы для обсуждения:

- 1) Как вы думаете, есть ли связь между бюджетом фильма и тем, насколько он нравится зрителям? А между сборами и оценками?
- 2) Как вы думаете, какие жанры получают самые высокие оценки? А самые низкие?
- 3) Если фильм собрал много денег в прокате, значит ли это, что он обязательно хороший?

**Проблемный вопрос:** мы часто думаем, что «дорогое» – значит «качественное», а «популярное» – значит «хорошее». Но так ли это на самом деле? Проверим на ваших данных.



**Обобщающий конструкт (границы применимости):** интуитивно кажется, что успех фильма (большие сборы, высокий бюджет) должен быть связан с его качеством. Но что, если это не так? Может быть, есть фильмы с огромным бюджетом, которые зрителям не нравятся? И наоборот – малобюджетные фильмы, которые становятся любимыми? Только анализ данных даёт ответ.

#### Этап 4. Основная работа

**Методическая функция:** применение всех изученных инструментов к личным данным.

**Деятельность учителя:** учитель выдаёт файл, в который ученики заносят все данные. Все данные объединяются в общую таблицу.

**Методический комментарий:** учитель заранее подготавливает Excel-файл с шапкой таблицы. На уроке ученики по очереди вносят свои данные в общую таблицу (или учитель собирает данные заранее и вносит сам).

Если есть возможность, ученики работают с файлом индивидуально. Если нет – учитель показывает всё на проекторе.

**Общая таблица (все данные класса):**

| №   | Название | Год | Жанр | Бюджет, млн \$ | Сборы, млн \$ | Рейтинг | Оценка ученика |
|-----|----------|-----|------|----------------|---------------|---------|----------------|
| 1   |          |     |      |                |               |         |                |
| ... |          |     |      |                |               |         |                |

#### Задание 1.

Найдите среднее значение, медиану и стандартное отклонение для:

- рейтинга;
- оценки ученика;
- бюджета;
- сборов.

#### Вопросы для обсуждения:

- 1) Какой средний рейтинг у фильмов, которые вы смотрели?
- 2) Почему среднее значение бюджета может не отражать типичный бюджет фильма в вашей выборке? Что в этом случае лучше использовать – среднее или медиану?
- 3) Какой разброс оценок? Есть ли фильмы, которые все оценили одинаково?
- 4) Совпадает ли средняя оценка учеников со средним рейтингом?



### **Задание 2.**

- 1) Постройте гистограмму распределения оценок учеников (интервал 1 балл).
- 2) Постройте гистограмму распределения рейтингов (интервал 0,5 балла).

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какая оценка встречается чаще всего? Совпадает ли это с рейтингом Кинопоиска?
- 2) Почему гистограммы могут отличаться?
- 3) Что говорит распределение оценок о вкусах вашего класса?
- 4) На что похоже распределение оценок – на нормальное, скошенное влево или вправо? Что это говорит о вкусах вашего класса?
- 5) Сравните гистограмму оценок учеников и гистограмму рейтингов Кинопоиска. Чем они отличаются?

### **Задание 3.**

- 1) Вычислите среднюю оценку учеников по каждому жанру.

| Жанр       | Средняя оценка | Количество фильмов |
|------------|----------------|--------------------|
| Боевик     |                |                    |
| Драма      |                |                    |
| Комедия    |                |                    |
| Фантастика |                |                    |
| Ужасы      |                |                    |
| Мультфильм |                |                    |
| ...        |                |                    |

- 2) Постройте столбиковую диаграмму «Средняя оценка по жанрам».

### **Вопросы для обсуждения:**

- 1) Какой жанр получил самые высокие оценки? А самый низкий?
- 2) Совпало ли это с вашими ожиданиями? Что удивило?
- 3) Как вы думаете, почему какие-то жанры оценивают выше?
- 4) Если какой-то жанр представлен всего одним фильмом, можно ли доверять его средней оценке? Почему?

### **Задание 4.**

- 1) Найдите коэффициенты корреляции между парами:
  - Бюджет ↔ Оценка ученика
  - Бюджет ↔ Рейтинг
  - Сборы ↔ Оценка ученика
  - Сборы ↔ Рейтинг
  - Год выпуска ↔ Оценка ученика
- 2) Постройте точечные диаграммы для пар с заметной корреляцией.

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Есть ли связь между бюджетом и оценкой?
- 2) Есть ли связь между сборами и оценкой?
- 3) Что оказалось неожиданным?
- 4) Почему связь между бюджетом и оценкой может быть слабой?

**Задание 5.**

- 1) Постройте точечную диаграмму: по оси X – рейтинг Кинопоиска, по оси Y – оценка ученика.
- 2) Добавьте линию тренда.

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Совпадают ли ваши оценки с рейтингом?
- 2) Если есть расхождения, как вы думаете, почему?
- 3) Что важнее – мнение профессионалов/критиков или ваш личный опыт?
- 4) Можно ли считать эти фильмы «выбросами» в общей выборке? Почему они получили такие оценки?
- 5) Если убрать эти фильмы из выборки, как изменится средняя оценка по классу?

**Задание 6.**

- 1) Найдите фильм с максимальной оценкой учеников.
- 2) Найдите фильм с минимальной оценкой учеников.
- 3) Сравните их по бюджету, сборам, жанру, году выпуска.

**Вопросы для обсуждения:**

- 1) Что общего у фильмов, которые получили высокие оценки?
- 2) А у фильмов с низкими оценками?
- 3) Можно ли по бюджету или жанру предсказать, понравится ли фильм?

**Этап 5. Презентация и обобщение**

**Методическая функция:** рефлексивно-мировоззренческое замыкание.  
Итоговое обобщение всего курса.

**Деятельность учителя:** учитель организует обсуждение, задавая вопросы, которые выводят на обобщение.

**Вопросы для общего обсуждения:**

- 1) Какой результат вас удивил больше всего? Почему?
- 2) Подтвердилась ли связь между бюджетом и качеством фильма?
- 3) Подтвердилась ли связь между сборами и качеством фильма?
- 4) Какой жанр получил самые высокие оценки? А самые низкие? Совпало ли с ожиданиями?
- 5) Совпадают ли ваши оценки с рейтингом? Если нет, то почему?
- 6) Какой вывод вы можете сделать о том, что делает фильм «хорошим»?

- 7) Какой инструмент из курса оказался самым полезным в этом исследовании?
- 8) Что изменилось в вашем понимании статистики за пять лет изучения курса «Вероятность и статистика»?



**Обобщающий конструкт (синтез):** Бюджет не гарантирует качество.

Большие деньги не всегда означают хороший фильм. Иногда малобюджетные фильмы оказываются любимыми, а дорогие – разочаровывают. Сборы – не показатель любви зрителей. Кассовый успех не всегда означает, что фильм понравился. Бывает, что люди идут на фильм из-за рекламы, а потом разочаровываются. Жанр имеет значение. Какие-то жанры в вашем классе получают более высокие оценки. Это может быть связано с возрастом, интересами, культурным контекстом. Личный опыт важнее чужих оценок. Ваши оценки могут не совпадать с рейтингом. И это нормально. У каждого свой вкус. Статистика помогает увидеть закономерности. Мы использовали средние значения, дисперсию, корреляцию, гистограммы и диаграммы. Все эти инструменты работают вместе и помогают понять, что скрывается за цифрами.

**Обобщающий вывод, к которому подводит учитель:** За пять лет мы изучили много инструментов: таблицы, диаграммы, гистограммы, средние значения, медиану, дисперсию, стандартное отклонение, частоту, вероятность, условную вероятность, случайные величины, распределения, математическое ожидание, ковариацию, корреляцию и регрессию. На первый взгляд кажется, что это много отдельных тем. Но сегодня мы увидели, что все они работают вместе. Мы проанализировали реальные данные о фильмах, которые вы смотрели. Мы нашли средние значения, изучили распределение, проверили гипотезы, нашли корреляции. Всё это – части одной системы.

**Главная мысль курса:**

*Мир полон неопределённости. Мы не можем точно предсказать будущее. Но мы можем оценивать вероятности, анализировать данные, находить закономерности и принимать обоснованные решения. Именно этому учит курс «Вероятность и статистика». Эти навыки пригодятся вам не только на экзаменах. Они будут нужны в любой профессии, в любом деле. Умение работать с данными – это ключевая компетенция XXI века.*

## Этап 6. Рефлексия

- 1) Какой фильм из вашей выборки оказался самым неожиданным с точки зрения статистики? *(Например, дорогой, но с низкой оценкой, или дешёвый, но с высокой)*
- 2) Что изменилось в вашем восприятии связи между «популярностью» и «качеством»?
- 3) Какой инструмент из курса вы будете использовать в жизни чаще всего? Почему?
- 4) Что было самым важным для вас за пять лет изучения курса «Вероятность и статистика»?

**11 класс. Урок 34. Случайные величины и распределения.  
Математическое ожидание случайной величины. Материалы к  
уроку**

Ссылка для скачивания материалов:

**<https://disk.yandex.ru/d/7w8kZvPaHPqS5Q>**



**11 класс. Урок 34. Случайные величины и распределения. Математическое  
ожидание случайной величины**

Материалы к уроку включают в себя:

- таблицу Excel для заполнения данных.

## Часть II. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

### Назначение диагностических работ

Если сценарии уроков – это инструмент для организации деятельности учителя по обобщению и систематизации знаний, то диагностические работы – это инструмент для проверки того, насколько успешно эта деятельность привела к результату. Они предназначены для оценки **способности учащихся устанавливать связи между разными темами курса**, а не для проверки знания отдельных формул или вычислительных навыков.

Курс «Вероятность и статистика» имеет свою специфику: понятия в нем существуют не в линейной последовательности, а в сложной взаимосвязи друг с другом. Вероятность, частота, случайная величина, математическое ожидание, закон больших чисел – эти понятия нельзя освоить по отдельности, они осмысливаются только в системе. Именно поэтому диагностика должна проверять не «знает ли ученик формулу», а «понимает ли он, как эта формула связана с другими и когда ее нужно применять».

### Отличие диагностических работ от контрольных

| Контрольная работа                                           | Диагностическая работа                                                    |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Проверяет знание формул и алгоритмов                         | Проверяет умение выбирать и применять инструменты                         |
| Содержит прямые вопросы: «найдите», «вычислите», «постройте» | Содержит открытые вопросы: «как вы думаете?», «что вы выберете и почему?» |
| Оценивается по количеству правильных ответов                 | Оценивается по уровню сформированности действий                           |
| Дает баллы за верные вычисления                              | Дает представление о том, как ученик мыслит                               |

### Структура диагностической работы

Каждая диагностическая работа построена как **единая сквозная задача** с единым сюжетом. Ученик последовательно проходит путь от анализа данных до принятия решения.

**Задания не содержат прямых инструкций** – ученик сам определяет, какие инструменты использовать и какие выводы делать. Именно его выбор определяет уровень сформированности действий.

Работа включает 4–5 заданий, каждое из которых проверяет определенный аспект работы с данными. Задания выстроены так, что каждый следующий шаг опирается на результаты предыдущего.

## Уровни сформированности

Для оценки результатов используется **четырёхуровневая** система, основанная на уровнях сформированности универсальных учебных действий (ФГОС):

| Уровень | Название                       | Что умеет ученик                                                                   |
|---------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Воспроизведение                | Выполняет стандартные операции по образцу, но не может их обосновать или выбрать.  |
| 2       | Применение в типовой ситуации  | Применяет алгоритмы в знакомых условиях, но не адаптирует их к изменениям.         |
| 3       | Осознанное применение          | Обосновывает выбор инструмента, интерпретирует результаты, видит связи между ними. |
| 4       | Творческое применение (синтез) | Решает нетипичные задачи, комбинирует способы, делает самостоятельные выводы.      |

Для каждого задания разработаны критерии, позволяющие отнести ответ ученика к одному из четырех уровней. В критериях приведены примерные ответы, которые помогают учителю оценить работу.

## Интерпретация результатов

Для каждого ученика фиксируется **индивидуальный профиль** – сочетание уровней по всем заданиям работы. На основе этого профиля учитель определяет не «средний балл», а зону ближайшего развития ученика: какие навыки уже сформированы, а какие требуют дополнительной работы.

В пособии приведены **рекомендации для учителя** по работе с каждым типом профиля. Это позволяет не просто констатировать результат, а планировать дальнейшую работу с учеником.

## Как использовать диагностические работы

1. Выберите работу, соответствующую классу.
2. Ознакомьтесь с методической справкой перед проведением работы. В ней указаны назначение, структура и рекомендуемое время выполнения.
3. Проведите работу. Ученики выполняют задания самостоятельно. Учитель не дает подсказок и не комментирует ход работы.
4. Оцените результаты по критериям. Для каждого задания определите уровень ответа ученика.
5. Зафиксируйте индивидуальный профиль. Сочетание уровней по всем заданиям дает представление о сформированности действий с данными у конкретного ученика.
6. Используйте рекомендации для планирования дальнейшей работы.

## 10 класс. Диагностическая работа

### Методическая справка для учителя

**Назначение работы:** работа предназначена для диагностики уровня сформированности у учащихся 10 класса умения самостоятельно выбирать вероятностно-статистические инструменты для решения практической задачи, интерпретировать результаты и принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

**Структура и содержание:** работа построена как единая сквозная задача. Ученик последовательно проходит путь от анализа данных до принятия решения, самостоятельно определяя, какие инструменты применять на каждом этапе.

### Уровни сформированности (на основе ФГОС):

| Уровень | Название                       | Что умеет ученик                                                                   |
|---------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Воспроизведение                | Выполняет стандартные операции по образцу, но не может их обосновать или выбрать.  |
| 2       | Применение в типовой ситуации  | Применяет алгоритмы в знакомых условиях, но не адаптирует их к изменениям.         |
| 3       | Осознанное применение          | Обосновывает выбор инструмента, интерпретирует результаты, видит связи между ними. |
| 4       | Творческое применение (синтез) | Решает нетипичные задачи, комбинирует способы, делает самостоятельные выводы.      |

**Рекомендуемое время выполнения:** 35–40 минут.

### Сюжет

В торговом центре установили два автомата по продаже кофе. Администратор хочет оптимизировать их работу: понять, сколько кофе загружать, как часто обслуживать и какой из автоматов в итоге выгоднее.

### Автомат №1:

- Вероятность того, что в случайный день продажи превысят 50 чашек, равна 0,6.
- Вероятность поломки в течение дня равна 0,05. Поломки в разные дни независимы.
- Если автомат сломался, его ремонтируют к следующему дню. Вероятность того, что ремонт будет выполнен качественно, равна 0,9.



**Автомат №2:**

- Количество проданных чашек за день – случайная величина  $X$  с распределением:

| $X$ (чашек) | 30  | 40  | 50  | 60   | 70   |
|-------------|-----|-----|-----|------|------|
| $P$         | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,25 | 0,15 |

- Вероятность поломки в течение дня равна 0,02.
- Если автомат сломался, его ремонтируют к следующему дню. Вероятность качественного ремонта – 0,95.

**Дополнительно:**

- Автоматы работают 20 дней в месяц.
- Прибыль от одной проданной чашки кофе – 50 рублей.
- Ремонт одной поломки стоит 2000 рублей.

**Задание 1**

Утром администратор загружает в автомат №1 50 чашек кофе. В конце дня он обнаруживает, что автомат сломался, и все 50 чашек проданы. Можно ли считать поломку причиной того, что кофе закончился?

**Критерии оценивания**

| Уровень | Критерий                                                                                                                                                            | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик дал ответ «да» или «нет» без вычислений или с примитивным объяснением                                                                                        | «Да, потому что автомат сломался»                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 2       | Ученик вычислил $P(\text{поломка и продажи} > 50) = 0,05 \times 0,6 = 0,03$ , но не сделал вывода о независимости                                                   | «Вероятность, что сломается и продажи превысят 50, равна 0,03»                                                                                                                                                                                                                                             |
| 3       | Ученик вычислил условную вероятность $P(\text{продажи} > 50 \mid \text{поломка}) = 0,6$ и сделал вывод о независимости                                              | $P(\text{продажи} > 50 \mid \text{поломка}) = 0,6$ совпадает с $P(\text{продажи} > 50) = 0,6$ – события независимы. Поломку нельзя считать причиной                                                                                                                                                        |
| 4       | Ученик не только выполнил расчёты, но и предложил способ проверить независимость на практике или объяснил, как это знание повлияет на другие решения администратора | Можно проверить независимость, собирая статистику: в дни без поломок считать долю дней с продажами $> 50$ , в дни с поломками – то же самое. Если доли совпадают – независимы. Если нет – есть связь. Это важно для планирования: если поломки и продажи независимы, то поломка не объясняет нехватку кофе |

## Задание 2

Утром администратор обнаружил, что один из двух автоматов сломался. Можно ли утверждать, что с вероятностью 50% сломался именно старый автомат? Если нет, то какая оценка более точна и почему?

### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                                                                    | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик утверждает, что вероятность равна 50%                                                                                                | «50%, потому что два автомата»                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 2       | Ученик использовал отношение вероятностей поломок, но не применил формулу полной вероятности                                                | $P \approx 0,05 / (0,05 + 0,02) \approx 0,71$                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 3       | Ученик применил формулу условной вероятности и получил точное значение                                                                      | $P(\text{№1} \mid \text{ровно один сломан}) = (0,05 \times 0,98) / (0,05 \times 0,98 + 0,95 \times 0,02) \approx 0,712$                                                                                                                                                                                  |
| 4       | Ученик объяснил, как можно оценить эту вероятность, если бы точные вероятности поломок были неизвестны, и привёл аналогию из другой области | Если бы мы не знали вероятностей поломок, можно было бы собирать статистику: считать, как часто при одной поломке это был старый автомат. Это дало бы эмпирическую оценку. Аналогичная логика работает в медицине: если болезнь редкая, положительный тест может давать низкую апостериорную вероятность |

## Задание 3

Администратор хочет каждый день загружать в автомат №2 одно и то же количество чашек. Он предполагает, что разумно загружать столько, сколько в среднем продаётся за день. Оцените, насколько это разумное решение.

### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                       | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик не знает, что делать с данными, или просто перечисляет числа из таблицы | «Продажи бывают от 30 до 70»                                                                                                                                                                                                            |
| 2       | Ученик вычислил среднее и считает, что это правильное решение                  | $E(X) = 51$ . Значит, нужно загружать 51 чашку                                                                                                                                                                                          |
| 3       | Ученик вычислил среднее и стандартное отклонение и объяснил риск               | $E(X) = 51$ , $\sigma \approx 12,1$ . Если загружать 51 чашку, примерно в половине дней кофе будет заканчиваться                                                                                                                        |
| 4       | Ученик предложил конкретное улучшение с обоснованием                           | Нужно загружать не среднее, а такое количество, при котором риск нехватки приемлем. Можно определить допустимый риск (например, 5%) и подобрать соответствующее значение. Либо загружать 60 и принимать риск 40%, или 65 как компромисс |

#### Задание 4

Как администратору оценить, сколько денег нужно закладывать в бюджет на ремонты каждый месяц?

#### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                              | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик умножил $20 \times$ вероятность $\times$ стоимость и получил одно число        | Для №1: $20 \times 0,05 \times 2000 = 2000$ руб. Для №2: $20 \times 0,02 \times 2000 = 800$ руб.                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2       | Ученик посчитал математическое ожидание числа поломок и сказал, что это и есть бюджет | $E(X) = 1$ поломка в месяц для №1, 0,4 для №2. Значит, закладывать 2000 руб. и 800 руб. соответственно                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 3       | Ученик использовал биномиальное распределение и оценил вероятность отклонений         | Вероятность хотя бы одной поломки у №1: $1 - 0,95^{20} \approx 0,642$ . Вероятность двух и более: $\approx 0,264$ . Значит, в 26% месяцев будет 2+ поломки, и бюджета 2000 руб. не хватит                                                                                                                                                                            |
| 4       | Ученик предложил практический способ планирования бюджета с учётом риска              | Можно выбрать такое число поломок $K$ , чтобы $P(X > K)$ был не более 5% (или другого приемлемого уровня). Для №1: при $K = 3$ , $P(X > 3) \approx 0,002$ (менее 1%). Значит, можно закладывать $3 \times 2000 = 6000$ руб. и быть уверенным почти на 100%. Для №2: при $K = 2$ , $P(X > 2) \approx 0,007$ (менее 1%). Можно закладывать $2 \times 2000 = 4000$ руб. |

#### Задание 5

У администратора есть бюджет, достаточный для замены одного из автоматов на более новую модель. Он может оставить либо №1, либо №2. Используя результаты предыдущих расчётов, подготовьте аргументированную рекомендацию: какой автомат оставить в работе, а какой заменить. Если вы считаете, что однозначного ответа нет, объясните, от чего должен зависеть выбор.

## Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                          | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик выбрал автомат без развёрнутого обоснования                                | «Нужно оставить новый автомат, потому что он надёжнее»                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 2       | Ученик сравнил автоматы по 1–2 критериям                                          | «Новый автомат реже ломается (0,02 против 0,05), поэтому его и нужно оставить»                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 3       | Ученик сравнил автоматы по нескольким критериям и показал, что выбор неоднозначен | У нового автомата ниже вероятность поломки (0,02 против 0,05) и больше максимальные продажи (70 против неизвестного максимума у старого). Но у старого автомата стабильнее продажи ( $P(>50) = 0,6$ – известная величина).<br>Выбор зависит от того, что важнее                                                                                                                                                                                                 |
| 4       | Ученик дал развёрнутую рекомендацию с условиями и предложил способ мониторинга    | Я рекомендую оставить новый автомат (№2): он надёжнее (0,02 против 0,05), даёт потенциально более высокий доход (максимум 70) и его распределение продаж известно, что позволяет точно планировать загрузку. Однако если старый автомат стоит в более проходном месте и даёт стабильно высокие продажи, решение может измениться. Предлагаю в течение месяца собирать данные о реальных продажах обоих автоматов и только потом принимать окончательное решение |

## Интерпретация результатов

**Общий принцип:** Для каждого ученика фиксируется индивидуальный профиль – сочетание уровней по пяти заданиям. На основе этого профиля учитель определяет уровень сформированности действий с данными у конкретного ученика.

## Тип профиля 1. Равномерный (все уровни совпадают)

| Профиль                        | Описание                                                                                                                                                                                 | Рекомендации                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Все задания – уровень 1</b> | Ученик выполняет только простейшие операции по образцу, не понимает, зачем нужны разные инструменты. Даёт интуитивные ответы без опоры на данные                                         | Недостаточный уровень. Рекомендуется вернуться к базовым задачам на вычисление вероятностей и статистических характеристик с акцентом на их смысл. Ученик не видит связи между вероятностными моделями и реальными решениями |
| <b>Все задания – уровень 2</b> | Ученик уверенно выполняет стандартные операции в знакомых условиях (вычисляет среднее, применяет формулы), но не может обосновать выбор инструмента и не интерпретирует результаты       | Базовый уровень. Рекомендуется добавлять вопросы «почему?» и «зачем?» при выполнении заданий. Переход от «как посчитать» к «что это значит для решения»                                                                      |
| <b>Все задания – уровень 3</b> | Ученик понимает смысл инструментов, обосновывает выбор, интерпретирует результаты, видит связи между вероятностными понятиями                                                            | Повышенный уровень. Можно переходить к заданиям с нестандартными контекстами и задачам на сравнение нескольких моделей                                                                                                       |
| <b>Все задания – уровень 4</b> | Ученик видит связи между инструментами, делает самостоятельные выводы, выходит за рамки прямого вопроса, предлагает практические способы проверки или переносит логику в другие ситуации | Высокий уровень. Можно предлагать исследовательские и проектные задачи на анализ реальных данных                                                                                                                             |

## Тип профиля 2. Неравномерный (разные уровни)

| Профиль                                        | Описание                                                                                                                                             | Рекомендации                                                                                                           |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Задание 1 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает условную вероятность и независимость, но не применяет эти понятия в других контекстах                                                | Работать над переносом: «Где ещё нужно проверять независимость событий?»                                               |
| <b>Задание 2 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает логику формулы Байеса, но не видит её связи с другими темами (условная вероятность, дерево вероятностей)                             | Работать над целостным пониманием: формула Байеса как обновление вероятностей на основе новой информации               |
| <b>Задание 3 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик работает со случайными величинами ( $E(X)$ , $D(X)$ ), но не связывает их с практическими решениями и не использует для сравнения альтернатив | Укреплять связь между математическими характеристиками и принятием решений: «Что означает это число для планирования?» |
| <b>Задание 4 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик применяет биномиальное распределение для оценки рисков, но не переносит этот подход на другие задачи                                          | Работать над переносом: «Где ещё нужно оценивать не только среднее, но и отклонения?»                                  |
| <b>Задание 5 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик делает хорошие содержательные выводы и умеет принимать решения, но не обосновывает их данными или расчётами                                   | Работать над аргументацией: «Какие данные и расчёты подтверждают твой вывод?»                                          |

## Тип профиля 3. С выраженным «западанием»

| Профиль                                                    | Описание                                                     | Рекомендации                                    |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Одно задание выполнено на 1–2 уровня ниже остальных</b> | Ученик в целом понимает материал, но есть конкретный пробел. | Целенаправленная работа над конкретным навыком. |

## **10 класс. Диагностическая работа. Электронный ресурс**

Ссылка для скачивания диагностической работы в формате Microsoft Word:

**<https://disk.yandex.ru/d/i9CW-3Wbllelow>**



**10 класс. Диагностическая работа**

## 11 класс. Диагностическая работа

### Методическая справка для учителя

**Назначение работы:** работа предназначена для диагностики уровня сформированности у учащихся 11 класса умения самостоятельно выбирать статистические инструменты для анализа реальных данных, интерпретировать результаты и принимать обоснованные решения в условиях неопределённости.

**Структура и содержание:** работа построена как единая сквозная задача. Ученик последовательно проходит путь от анализа данных до принятия решения, самостоятельно определяя, какие инструменты применять на каждом этапе.

**Уровни сформированности (на основе ФГОС):**

| Уровень | Название                       | Что умеет ученик                                                                   |
|---------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Воспроизведение                | Выполняет стандартные операции по образцу, но не может их обосновать или выбрать.  |
| 2       | Применение в типовой ситуации  | Применяет алгоритмы в знакомых условиях, но не адаптирует их к изменениям.         |
| 3       | Осознанное применение          | Обосновывает выбор инструмента, интерпретирует результаты, видит связи между ними. |
| 4       | Творческое применение (синтез) | Решает нетипичные задачи, комбинирует способы, делает самостоятельные выводы.      |

**Рекомендуемое время выполнения:** 35–40 минут.



## Сюжет

Сеть магазинов электроники провела рекламную кампанию в интернете. Для оценки эффективности рекламы маркетологи собрали данные по 15 городам, где проходила кампания. Для каждого города известны следующие показатели:

| Город | Бюджет рекламы (тыс. руб.) | Продажи до кампании (млн руб.) | Продажи после кампании (млн руб.) | Число показов рекламы (тыс.) | Число кликов (тыс.) |
|-------|----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|---------------------|
| 1     | 45                         | 12,4                           | 15,0                              | 120                          | 5,0                 |
| 2     | 62                         | 15,2                           | 18,5                              | 160                          | 6,8                 |
| 3     | 28                         | 8,7                            | 10,2                              | 75                           | 3,2                 |
| 4     | 80                         | 18,9                           | 23,1                              | 220                          | 9,5                 |
| 5     | 35                         | 10,5                           | 12,8                              | 95                           | 4,0                 |
| 6     | 55                         | 13,8                           | 16,8                              | 140                          | 6,0                 |
| 7     | 70                         | 17,0                           | 21,0                              | 190                          | 8,0                 |
| 8     | 40                         | 11,2                           | 13,5                              | 108                          | 4,6                 |
| 9     | 90                         | 20,5                           | 25,5                              | 250                          | 10,8                |
| 10    | 25                         | 7,8                            | 9,0                               | 65                           | 2,7                 |
| 11    | 50                         | 12,9                           | 15,7                              | 132                          | 5,5                 |
| 12    | 75                         | 18,0                           | 22,0                              | 200                          | 8,5                 |
| 13    | 32                         | 9,5                            | 11,2                              | 85                           | 3,6                 |
| 14    | 85                         | 19,5                           | 24,0                              | 235                          | 10,2                |
| 15    | 48                         | 13,0                           | 15,8                              | 125                          | 5,2                 |

### Задание 1

Рекламное агентство гарантировало среднее увеличение 4 млн рублей. Оцените, насколько серьёзно расхождение между гарантией агентства и полученными данными.

### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                               | Пример ответа                                                                                                                                                                         |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик сравнил числа 3,8 и 4 и сделал вывод без учёта разброса                                         | «Разница всего 0,2 млн – расхождение несерьёзное»                                                                                                                                     |
| 2       | Ученик вычислил разброс (стандартное отклонение) и упомянул его, но не использовал для оценки точности | «Разброс большой – около 1,3 млн, поэтому 0,2 млн не так важно»                                                                                                                       |
| 3       | Ученик использовал стандартную ошибку среднего для оценки точности                                     | Стандартная ошибка среднего $\approx 1,3/\sqrt{15} \approx 0,34$ млн. Расхождение 0,2 млн меньше стандартной ошибки, поэтому данные не противоречат гарантии агентства                |
| 4       | Ученик предложил способ, как можно было бы проверить гарантию агентства с большей надёжностью          | Чтобы проверить гарантию надёжнее, нужно увеличить число городов в выборке. При $n=100$ стандартная ошибка была бы $1,3/10 = 0,13$ млн, и тогда расхождение 0,2 млн стало бы заметным |

## Задание 2

Сравните продажи в городах №9 и №10. В каком городе реклама сработала эффективнее?

### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                                         | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик сравнил абсолютные увеличения                                                                             | «Во втором городе увеличение 5 млн, в первом – 1,2 млн. Значит, во втором эффективнее»                                                                                                                                                                                                                 |
| 2       | Ученик использовал относительные изменения                                                                       | В первом городе рост 15,4%, во втором – 24,4%. Во втором эффективнее                                                                                                                                                                                                                                   |
| 3       | Ученик учёл разный масштаб продаж и сравнил эффективность на рубль бюджета                                       | Первый город: $1,2 / 25 = 0,048$ млн/тыс.руб. Второй: $5 / 90 \approx 0,056$ млн/тыс.руб. По этому критерию второй город эффективнее, но разница небольшая                                                                                                                                             |
| 4       | Ученик объяснил, что ответ зависит от того, что считать эффективностью, и предложил несколько способов сравнения | Если считать эффективность как процентный рост – второй город лучше. Если как прирост на рубль бюджета – тоже второй. Но если считать, что первый город при малом бюджете показал хороший результат, а у второго бюджет был большой, то выбор неочевиден. Нужно явно определить критерий эффективности |

## Задание 3

Как можно оценить, насколько бюджет рекламы связан с объёмом продаж, и стоит ли увеличивать рекламный бюджет в следующем году?

### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                                                               | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик заметил, что в городах с большим бюджетом продажи выше                                                                          | «В городах с большим бюджетом продажи выше, значит, бюджет влияет»                                                                                                                                                                                    |
| 2       | Ученик вычислил коэффициент корреляции                                                                                                 | $r \approx 0,95$                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3       | Ученик вычислил коэффициент корреляции и объяснил, что он показывает                                                                   | $r \approx 0,95$ – очень сильная связь. Это значит, что больший бюджет почти всегда сопровождается большими продажами. Увеличивать бюджет имеет смысл                                                                                                 |
| 4       | Ученик объяснил, что корреляция не означает, что увеличение бюджета гарантированно даст рост продаж, и предложил, что ещё нужно учесть | Корреляция показывает связь, но не причину. Возможно, бюджеты выделяли в города с большим потенциалом. Чтобы принять решение, нужно посмотреть на прирост продаж на рубль бюджета или провести эксперимент с одинаковыми городами и разными бюджетами |

#### Задание 4

Администратор хочет заранее планировать продажи в городах на основе запланированного бюджета рекламы. Предложите способ, который позволит ему это делать, и оцените, насколько такой способ надёжен.

#### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                                                             | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик сказал, что это можно сделать, но не предложил конкретного способа                                                            | «Можно посмотреть на данные и примерно прикинуть»                                                                                                                                                                                                             |
| 2       | Ученик построил уравнение регрессии                                                                                                  | $Y = 1,2 + 0,27X$                                                                                                                                                                                                                                             |
| 3       | Ученик построил уравнение регрессии и оценил его точность через $R^2$                                                                | $R^2 \approx 0,90$ – 90% вариации продаж объясняется бюджетом. Модель довольно точная                                                                                                                                                                         |
| 4       | Ученик не только построил модель, но и оценил точность прогноза (стандартную ошибку) и предложил, как можно было бы улучшить прогноз | Стандартная ошибка регрессии $\approx 0,8$ млн руб. При бюджете 60 тыс. руб. прогноз: 17,4 млн руб., но реальное значение может отличаться на $\pm 0,8$ млн. Чтобы улучшить прогноз, можно добавить другие факторы: сезонность, конкуренцию, население города |

#### Задание 5

В городах с большим числом кликов продажи выше, и администратор собирается увеличивать бюджет на рекламу, чтобы получить больше кликов. Объясните, почему увеличение бюджета не гарантирует роста продаж, даже если связь между кликами и продажами существует. Что ещё нужно проверить, чтобы принять правильное решение?

#### Критерии оценивания

| Уровень | Критерий                                                                                                                                            | Пример ответа                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Ученик просто сказал, что связь может быть случайной                                                                                                | «Клики и продажи могут быть связаны случайно»                                                                                                                                                                                                        |
| 2       | Ученик заметил, что оба показателя могут зависеть от бюджета                                                                                        | «Чем больше бюджет, тем больше кликов и тем больше продаж. Возможно, продажи растут из-за бюджета, а не из-за кликов»                                                                                                                                |
| 3       | Ученик предложил конкретный способ проверки: выделить города с одинаковым бюджетом, но разным числом кликов, и сравнить продажи                     | Нужно найти города с примерно одинаковым бюджетом. Если при одинаковом бюджете в городах с большим числом кликов продажи выше – это аргумент в пользу влияния кликов. Если нет – клики не дают эффекта сверх бюджета                                 |
| 4       | Ученик предложил способ количественной проверки: построить множественную регрессию и оценить значимость коэффициента при кликах после учёта бюджета | Можно построить регрессию $Y = a \cdot \text{Бюджет} + b \cdot \text{Клики} + c$ . Если коэффициент $b$ значимо отличается от нуля, то клики действительно влияют на продажи сверх эффекта бюджета. Если нет – клики не дают дополнительного эффекта |

## Интерпретация результатов

**Общий принцип:** Для каждого ученика фиксируется индивидуальный профиль – сочетание уровней по пяти заданиям. На основе этого профиля учитель определяет уровень сформированности действий с данными у конкретного ученика.

### Тип профиля 1. Равномерный (все уровни совпадают)

| Профиль                        | Описание                                                                                                                                                                                 | Рекомендации                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Все задания – уровень 1</b> | Ученик выполняет только простейшие операции по образцу, не понимает, зачем нужны разные инструменты. Даёт интуитивные ответы без опоры на данные                                         | Недостаточный уровень. Рекомендуется вернуться к базовым задачам на вычисление вероятностей и статистических характеристик с акцентом на их смысл. Ученик не видит связи между вероятностными моделями и реальными решениями |
| <b>Все задания – уровень 2</b> | Ученик уверенно выполняет стандартные операции в знакомых условиях (вычисляет среднее, применяет формулы), но не может обосновать выбор инструмента и не интерпретирует результаты       | Базовый уровень. Рекомендуется добавлять вопросы «почему?» и «зачем?» при выполнении заданий. Переход от «как посчитать» к «что это значит для решения»                                                                      |
| <b>Все задания – уровень 3</b> | Ученик понимает смысл инструментов, обосновывает выбор, интерпретирует результаты, видит связи между вероятностными понятиями                                                            | Повышенный уровень. Можно переходить к заданиям с нестандартными контекстами и задачам на сравнение нескольких моделей                                                                                                       |
| <b>Все задания – уровень 4</b> | Ученик видит связи между инструментами, делает самостоятельные выводы, выходит за рамки прямого вопроса, предлагает практические способы проверки или переносит логику в другие ситуации | Высокий уровень. Можно предлагать исследовательские и проектные задачи на анализ реальных данных                                                                                                                             |

## Тип профиля 2. Неравномерный (разные уровни)

| Профиль                                        | Описание                                                                                                                                                   | Рекомендации                                                                                          |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Задание 1 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает выборочный метод и оценку точности среднего, но не применяет статистические инструменты в других контекстах                                | Работать над переносом: «Где ещё нужно оценивать точность оценки по выборке?»                         |
| <b>Задание 2 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает, что сравнивать нужно не абсолютные, а относительные величины, но не применяет статистические методы для сравнения                         | Показать, что сравнение требует учёта разброса и контекста, а не только средних значений              |
| <b>Задание 3 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает корреляцию и её силу, но не переходит к регрессии и не видит ограничений корреляционного анализа                                           | Работать над переходом от корреляции к регрессии как следующему шагу анализа                          |
| <b>Задание 4 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик строит регрессионные модели, но не оценивает их точность и не предлагает способов улучшения                                                         | Укреплять связь между построением модели и оценкой её качества ( $R^2$ , стандартная ошибка)          |
| <b>Задание 5 – высокий, остальные – низкие</b> | Ученик понимает различие между корреляцией и причинностью и предлагает способы проверки, но не применяет статистические методы для количественной проверки | Работать над формальными методами проверки причинности (множественная регрессия, контроль переменных) |

## Тип профиля 3. С выраженным «западанием»

| Профиль                                                    | Описание                                                     | Рекомендации                                    |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Одно задание выполнено на 1–2 уровня ниже остальных</b> | Ученик в целом понимает материал, но есть конкретный пробел. | Целенаправленная работа над конкретным навыком. |

## **11 класс. Диагностическая работа. Электронный ресурс**

Ссылка для скачивания диагностической работы в формате Microsoft Word:

**<https://disk.yandex.ru/d/5vV0F5mStT1JSQ>**



**11 класс. Диагностическая работа**

# ПОСЛЕСЛОВИЕ

---

Уважаемые коллеги!

Перед Вами пособие, которое задумывалось как методический инструмент, а не как жесткая инструкция. Любой инструмент раскрывается в полной мере только в руках того, кто им пользуется осознанно и творчески.

При разработке пособия учитывалось, что у учителя не всегда есть возможность провести все предложенные уроки в полном объеме. В 11 классе к этому добавляется интенсивная подготовка к ЕГЭ, и время на обобщение и систематизацию часто оказывается в дефиците. Именно поэтому в пособие сознательно включено больше материалов, чем можно успеть за отведенные часы. Это не ошибка планирования, а осознанное решение: учителю предлагается выбор, а не обязательство.

Как использовать это пособие – решать учителю.

## *Материалы пособия могут быть использованы по-разному:*

- проведение уроков по полным сценариям, с сохранением предложенной логики и структуры.
- адаптация сценариев под конкретный класс – с возможностью сокращения или замены отдельных заданий в зависимости от уровня подготовки учащихся.
- использование отдельных элементов сценариев – обобщающих конструкторов, проблемных вопросов, сюжетов – для встраивания в собственные уроки.
- применение диагностических работ целиком или выборочно, в зависимости от целей проверки.
- использование материалов пособия на дополнительных учебных часах – в рамках внеурочной деятельности, элективных курсов, индивидуальных консультаций.

Главное, что заложено в основу пособия: **курс «Вероятность и статистика» – это не набор разрозненных тем, а целостная система понятий, связанных между собой.** Обобщение и систематизация являются ключевой формой работы, без которой знания остаются формальными и разрозненными. Пособие призвано помочь учителю в организации этой работы, но последнее слово всегда остается за ним.

## *Благодарности*

Автор выражает искреннюю благодарность коллегам, чья профессиональная поддержка и содержательные замечания помогли сделать это пособие более качественным и практико-ориентированным.

Особая благодарность выражается **Гончаровой Маргарите Алексеевне**, заведующей кафедрой математического образования, информатики и ИКТ, к.п.н., доценту, **Решетниковой Наталье Валерьевне**, заведующей лабораторией по сопровождению деятельности практиков, к.п.н. – за профессиональную экспертизу готовых материалов, ценные методические советы и содействие в продвижении пособия в профессиональном сообществе.

Автор также благодарит **Мобильную сеть учителей математики Алтайского края** за содержательное обсуждение пособия, конструктивные замечания и предложения, которые

позволили учесть реальные потребности учителей и сделать материалы более гибкими и удобными в использовании.

***И напоследок***

Я буду искренне благодарен за Ваши замечания, предложения и отзывы. Конструктивная критика – лучший способ сделать сборник лучше. Если какое-то задание показалось неудачным, если чего-то не хватает или, наоборот, слишком много, сообщите. Следующее издание обязательно учтет Ваши пожелания.

Связаться со мной можно по электронной почте: [re.chepkasov@yandex.ru](mailto:re.chepkasov@yandex.ru)

Успешного учебного года и интересных уроков!

*Р.Э. Чепкасов*



КАУ ДПО «Алтайский институт развития образования  
имени Адриана Митрофановича Топорова»

Методические материалы по обобщению и систематизации знаний по курсу  
«Вероятность и статистика» для 10–11 классов: пошаговые сценарии уроков,  
диагностические работы / Р.Э. Чепкасов. – Барнаул: КАУ ДПО «АИРО имени  
А.М. Топорова», 2026. – 97 с.

Автор-составитель:

*Чепкасов Родион Эдуардович, учитель первой квалификационной категории,  
магистр в рамках направления «Педагогическое образование»*

Адрес редакции, издателя: 656049, Сибирский федеральный округ, Алтайский  
край, г. Барнаул, пр. Социалистический, 60; тел. (3852) 55-58-87 (приемная);  
сайт: [iro22.ru](http://iro22.ru), электронная почта: [info@iro22.ru](mailto:info@iro22.ru)