



**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
АЛТАЙСКОГО КРАЯ**



**АЛТАЙСКИЙ
ИНСТИТУТ
РАЗВИТИЯ
ОБРАЗОВАНИЯ**
имени А.М. Топорова

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ



**МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
АЛТАЙСКОГО КРАЯ**



**АЛТАЙСКИЙ
ИНСТИТУТ
РАЗВИТИЯ
ОБРАЗОВАНИЯ**
имени А.М. Топорова

Решение заданий с параметрами

Барнаул, 2026 г.

Министерство образования и науки Алтайского края
КАУ ДПО «Алтайский институт развития образования
имени Адриана Митрофановича Топорова»
Кафедра математического образования, информатики и ИКТ

Решение заданий с параметрами : учебное пособие / М.А. Гончарова, Т.В. Маколкина, Н.В. Решетникова. – Барнаул: КАУ ДПО «АИРО имени А.М. Топорова», 2026. – 112 с.

Учебное пособие предназначено для широкого круга читателей: учителей и преподавателей математики, учащихся 7-11 классов общеобразовательных организаций, а также студентов педагогических специальностей вузов и учреждений среднего профессионального образования. Оно может быть полезно при подготовке к государственной итоговой аттестации, на факультативных занятиях и в рамках курсов по выбору. В пособии систематизированы задачи с параметрами и основные методы их решения, включая уравнения, неравенства и системы.

Книга состоит из двух разделов. Первый раздел посвящен графическому методу решения, который позволяет наглядно интерпретировать задачи и определять количество корней в зависимости от значений параметра. Второй раздел охватывает разнообразные аналитические приемы решения задач с параметрами: использование монотонности, неотрицательности и ограниченности функций, метода мажорант, свойств четности, а также оценку множества значений функций.

Особое внимание уделяется практической направленности содержания: задания сопровождаются подробными решениями или ответами, теоретическими справками, тестами для самоконтроля и заданиями для самостоятельной работы. Учебное пособие может быть использовано в школе как на уроках, так и во внеурочной деятельности, а также при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ. Для студентов педагогических специальностей оно послужит методическим ориентиром в освоении подходов к обучению решению параметрических задач.

Оглавление

РАЗДЕЛ 1. Графический метод решения задач с параметрами.....	6
Теоретическая справка	7
§1. От простого к сложному.....	12
Практические задания.....	13
§2. Решение систем уравнений с параметрами	18
Практические задания.....	18
§3. Решение задач с параметрами в системе координат xOa	27
Практические задания.....	27
§4. Решение неравенств с параметрами	38
Практические задания.....	38
РАЗДЕЛ 2. Разные приемы решения уравнений и неравенств с параметрами.....	45
§1. Решение уравнений и неравенств с параметрами с помощью монотонности функций.....	45
Теоретическая справка	45
Практические задания.....	49
§2. Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, с применением свойства неотрицательности функций.....	56
Теоретическая справка	56
Тест по теме «Неотрицательность функций при решении уравнений и неравенств».....	57
Практические задания.....	58
§3. Метод мажорант (метод ограниченности) для решения уравнений и неравенств с параметрами	61
Теоретическая справка	61
Практические задания.....	62
Задания для самостоятельной работы.....	64
§4. Оценка множества значений функций для решения уравнений и неравенств с параметрами	72

Теоретические сведения	72
Тест по теме «Множество значений функций»	75
Практические задания.....	76
Задания для самостоятельной работы.....	77
§5. Решение уравнений и неравенств с параметрами и их систем с помощью свойства четности функций	83
Теоретическая справка	83
Тест по теме «Четность и нечетность функций»	84
Практическое задание.....	86
Задания для самостоятельной работы.....	87
§6. Графический метод для решения уравнений, неравенств с параметрами и их систем	97
Теоретическая справка	97
Тест по теме «Графики функций»	98
Практические задания.....	100
Задания для самостоятельной работы.....	102

РАЗДЕЛ 1.

Графический метод решения задач с параметрами

Цель первого раздела – формирование умений решать задачи с параметрами графическим методом: строить графики (прямые, окружности и др.) и по числу их пересечений определять количество решений уравнений, систем и неравенств, содержащих параметры. Содержание раздела построено от простых задач с параметрами к сложным, что позволяет формировать целостное представление об этих задачах как о геометрически интерпретируемых объектах. Раздел закладывает базу для самостоятельного переноса графического метода на более сложные конструкции (с модулями, иррациональными, тригонометрическими функциями и т.п.), а также учит выбирать рациональный путь решения – от анализа рисунка до аккуратного алгебраического подтверждения. Это делает математическую подготовку осознанной, дает надежную опору для решения заданий повышенной сложности.

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики и требует большого количества времени на освоение соответствующих умений.

К сожалению, в программах по математике задачам с параметром отводится недостаточно места. Между тем, задачи с параметрами можно и нужно использовать уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств. Это могут быть задачи на нахождение решений в общем виде, на определение корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, на исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

При решении заданий с параметром важно понимать разницу между неизвестной и параметром. Корень уравнения – это значение неизвестной, при котором равенство выполняется. Параметр же является коэффициентом уравнения и может определённым образом влиять на числовое значение корня, а также на количество корней.

В формулировке задач с параметром как правило просят найти значения параметра, при которых данное уравнение имеет заданное количество корней – например, один, два или три.

Чаще всего мы имеем дело с уравнениями с параметром, неравенствами с параметром и их системами. Но параметр может встретиться и в формуле, задающей функцию. Например, – линейная функция с параметром. Эта формула задаёт семейство прямых на плоскости, которые проходят через точку в системе координат. Параметр при этом определяет угол наклона каждой прямой к оси – это угол, который отсчитывается от положительного направления оси к прямой против часовой стрелки.

Задачи с параметром можно решать разными способами. Мы рассмотрим графический метод решения задач с параметрами.

Графический метод решения основан на построении графиков уравнений, неравенств и их систем. Если в уравнении одна неизвестная и один параметр, то можно построить график этого уравнения в системе координат – это будет множество всех точек на плоскости, каждая из которых является решением этого уравнения. Тогда ответить на вопрос, при каких значениях параметра уравнение имеет нужное количество решений, не так сложно. Когда в уравнении две неизвестных, например, да ещё и параметр, то построить графическое решение сложнее. В таком случае графиком может быть не одна линия, а целое семейство похожих линий, движение которых по плоскости зависит от значения параметра.

Ниже приведены некоторые теоретические сведения, которые целесообразно использовать при решении задач с параметрами графическим методом.

Теоретическая справка

1. Прямая

$$y = kx + m$$

k – параметр

В данном случае графиком является пучок прямых, проходящих через точку $(0; m)$. Иными словами, происходит поворот прямой вокруг неподвижной

точки с координатами $(0; m)$, т.к. при любом значении параметра k , если $x = 0$, то $y = m$.

Пример: $y = kx + 3$.

Прямая поворачивается вокруг неподвижной точки с координатами $(0; 3)$ (рис. 1).

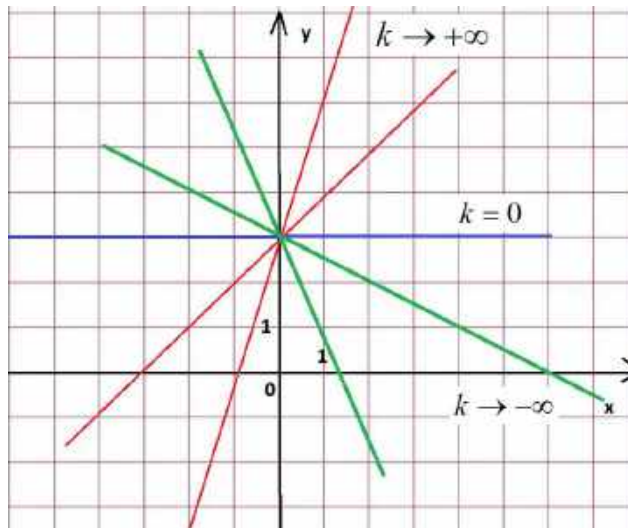


Рис. 1

m – параметр

Графиком является семейство прямых $y = kx$, смещающихся параллельным переносом вдоль оси Oy .

Пример: $y = 3x + m$.

Функция $y = 3x$ задает семейство прямых, смещающихся параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 2).

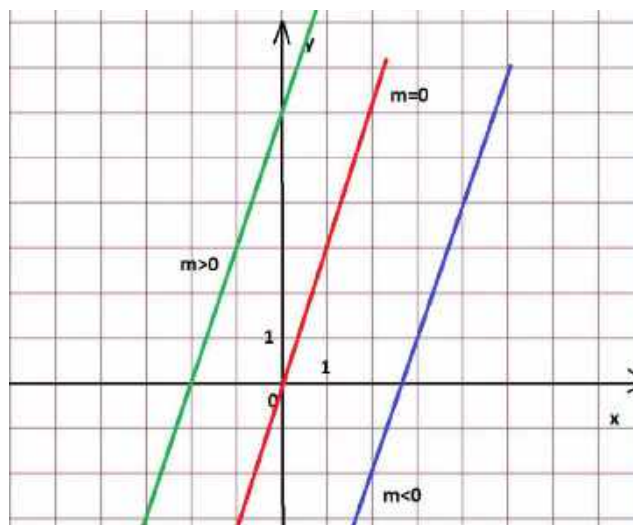


Рис. 2

2. Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$(x_0; y_0)$ – центр окружности

r – радиус окружности

а) $r = a$ – параметр

В данном случае получаются концентрические окружности, которые имеют общий центр, но разные радиусы (рис. 3).

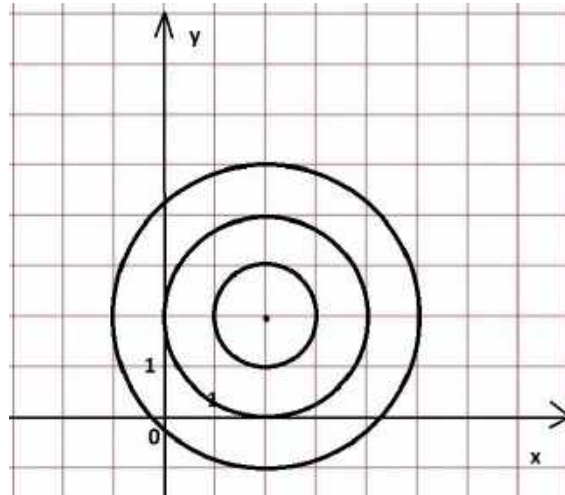


Рис. 3

Для нахождения радиуса возможно использовать формулу расстояния от точки прямой.

Расстояние d от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ (см. рис. 4)

вычисляется по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

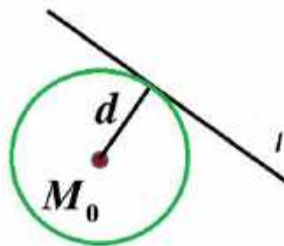


Рис. 4

б) $(x_0; y_0)$ – центр окружности содержит параметр

$(x - x_0)^2 + (y - a)^2 = r^2$ – центр $(x_0; a)$ лежит на прямой $x = a$ (рис. 5);

$(x - a)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ – центр $(a; y_0)$ лежит на прямой $y = a$ (рис. 6);

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$ – центр $(a; a)$ лежит на прямой $y = x$ (рис. 7).

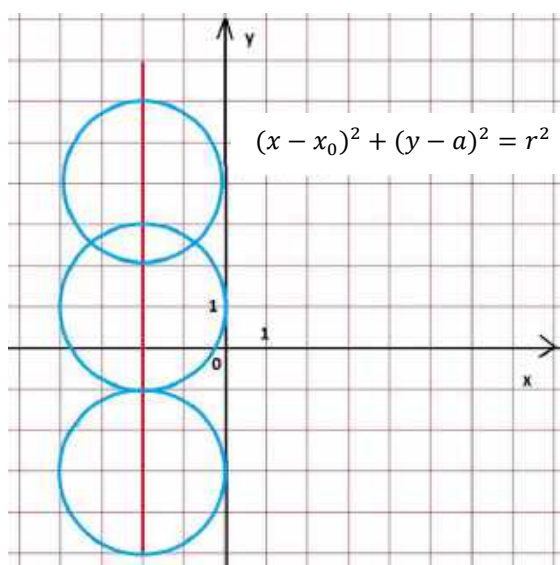


Рис. 5

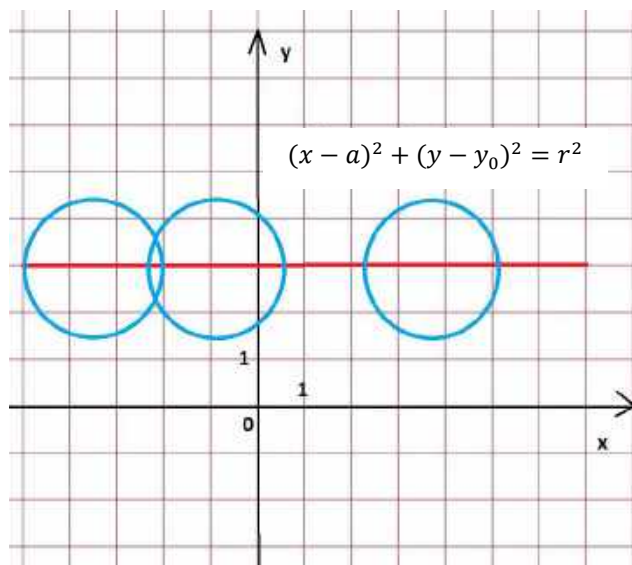


Рис. 6

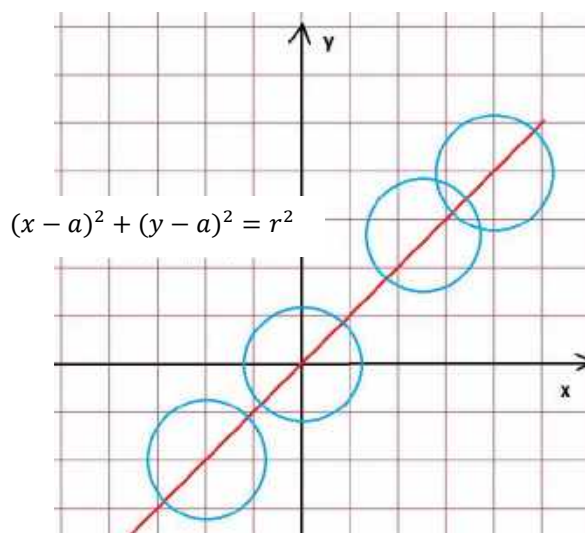


Рис. 7

3. Модуль

$y = |x| + a$, сдвиг графика функции $y = |x|$ на a вверх или вниз (рис. 8а).

$y = |x + a|$, сдвиг графика функции $y = |x|$ на a влево или вправо (рис. 8б).

$|x - x_0| + |y - y_0| = a$, квадрат с центром $(x_0; y_0)$ и диагональю, равной $2a$.

$y = ||x| + a|$, в данном случае к графику функции $y = |x|$ применяется преобразование $y = |f(x)|$ (рис. 8г).

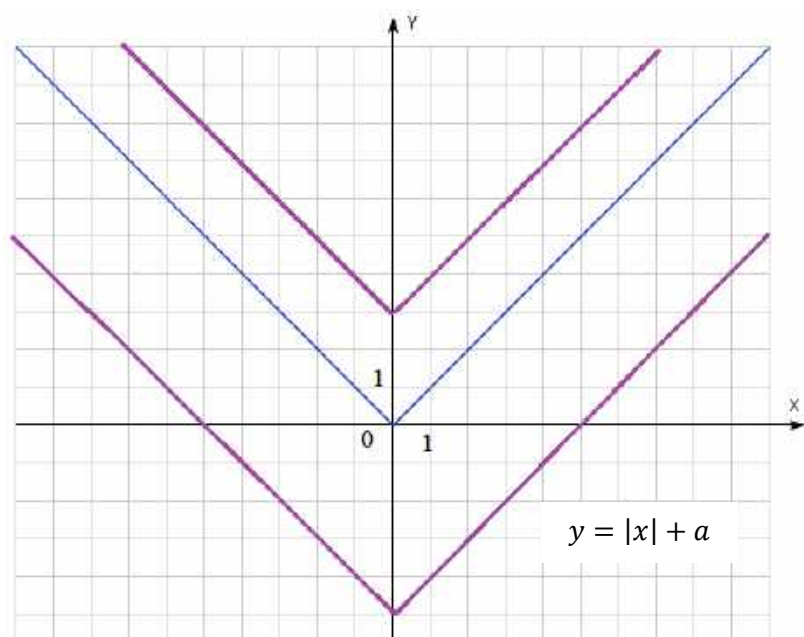


Рис. 8а

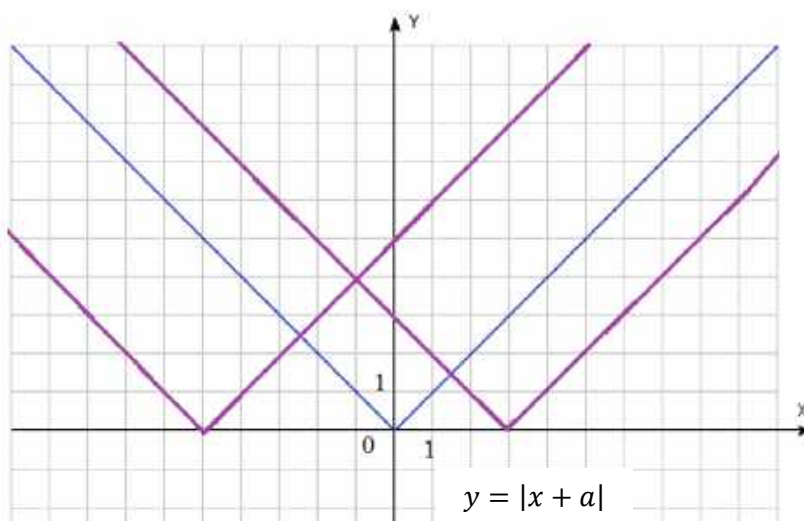


Рис. 8б

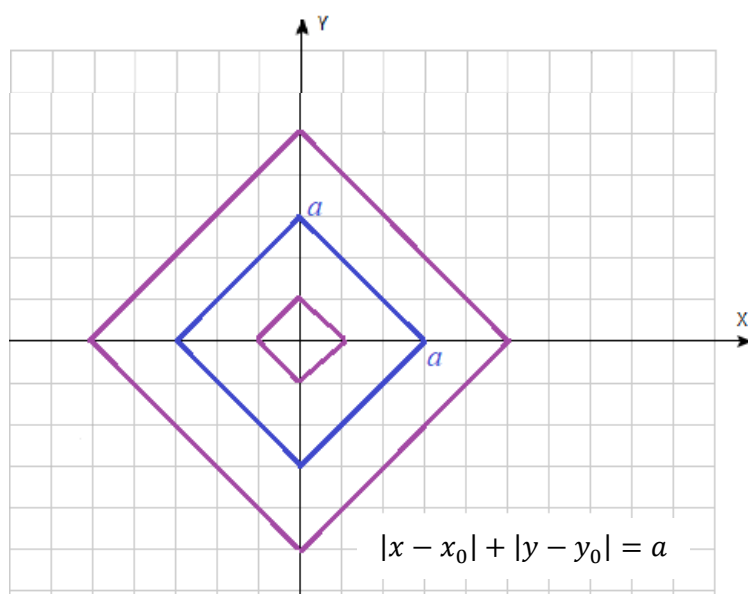


Рис. 8в

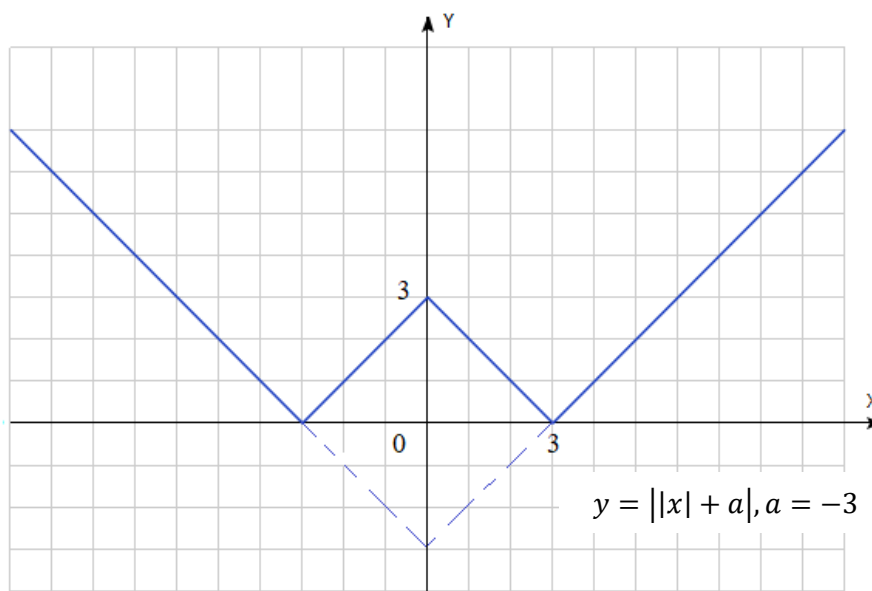


Рис. 8г

Для решения задач с параметрами целесообразно применять следующие методические приемы:

1. Вводится система xOa .
2. Определяется точка касания (составляется квадратное уравнение и требуется, чтобы $D = 0$).
3. Решается квадратное уравнение с параметром, в котором $D = d^2$:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$D = d^2.$$

$$\begin{cases} x = \frac{-b+\sqrt{d^2}}{2a}, \\ x = \frac{-b-\sqrt{d^2}}{2a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b+|d|}{2a}, \\ x = \frac{-b-|d|}{2a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{-b+d}{2a}, d \geq 0, \\ x = \frac{-b-d}{2a}, d < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-b-d}{2a}, d \geq 0, \\ x = \frac{-b+d}{2a}, d < 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b+d}{2a}, \\ x = \frac{-b-d}{2a}. \end{cases}$$

§1. От простого к сложному

В данном пункте приведем решение задач с параметрами, многие из которых встречаются на ОГЭ по математике в 9 классе. В 9 классе постановка задачи сводится к тому, чтобы построить график заданной функции и найти количество точек пересечения с прямой $y = a$ или $y = kx$. Однако данные задачи можно переформулировать в виде: «При каких значениях параметра данное

уравнение имеет определенное количество корней». В этом случае учащиеся учатся понимать, что такое параметр и как можно решить уравнение или систему с ним.

Практические задания

Задание 1.

При каких значениях параметра a уравнение имеет два решения $|x - 2| - |x + 1| = 2 - x + a$?

Решение.

Данную задачу можно переформулировать следующим образом: Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| - 2 + x$ и найдите значение a , при которых прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

$$y = \begin{cases} x - 2 - x - 1 + x - 2, & x \geq 2, \\ 2 - x - x - 1 + x - 2, & -1 \leq x < 2, \\ 2 - x + x + 1 + x - 2, & x < -1; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x - 5, & x \geq 2, \\ -x - 1, & -1 \leq x < 2, \\ x + 1, & x < -1. \end{cases}$$

Изобразим график полученной кусочной функции:

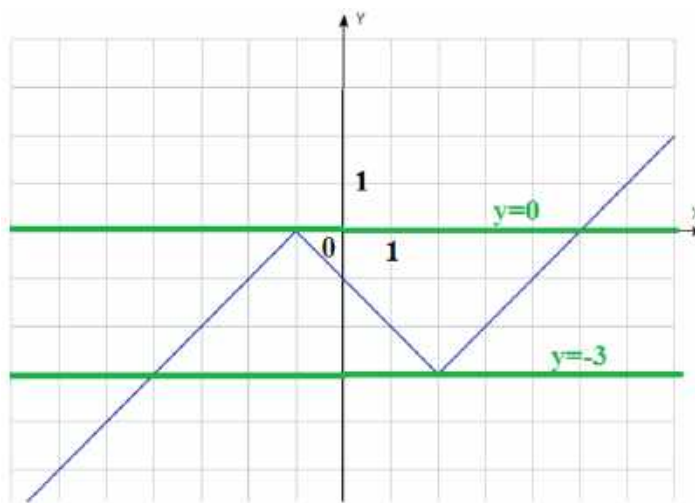


Рис. 9

Прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $a = -3$ или $a = 0$.

Ответ: $\{-3; 0\}$.

Задание 2.

Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$\left| \frac{1-2x}{x+1} \right| = a?$$

Решение.

Построим график функции $y = \left| \frac{1-2x}{x+1} \right|$ и найдем количество точек пересечения с прямой $y = a$.

Преобразуем функцию $y = \left| \frac{1-2x}{x+1} \right|$,

$$y = \frac{-2(x+1)+2+1}{x+1},$$

$$y = \frac{3}{x+1} - 2.$$

Графиком подмодульной функции является гипербола $y = \frac{3}{x}$, которая смещается на 2 единицы вниз и на 1 единицу влево. Далее для графика функции $y = \frac{3}{x+1} - 2$ применим преобразование $y = |f(x)|$ (рис. 10).

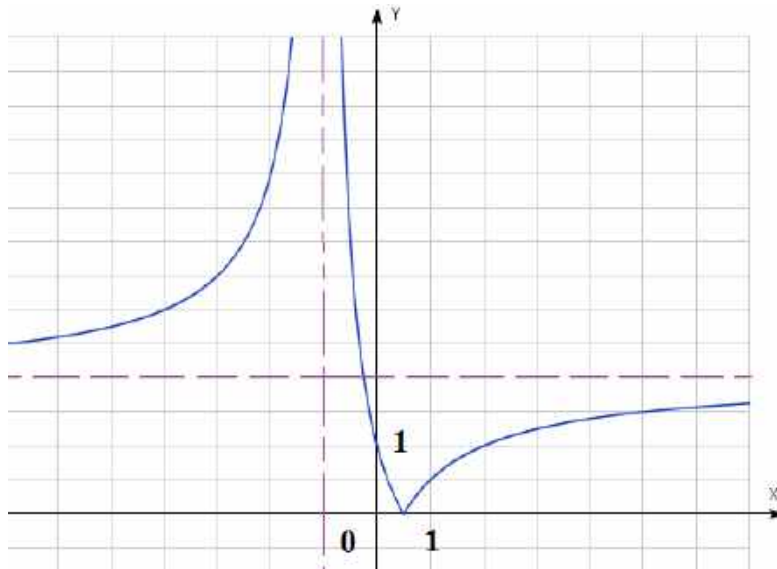


Рис. 10

Прямая $y = a$ имеет с графиком функции одну общую точку при $a = 0$, $a = 2$; две общие точки при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Следовательно, уравнение имеет одно решение при $a \in \{0; 2\}$, два решения при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: одно решение при $a \in \{0; 2\}$, два решения при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Задание 3.

При каких значениях параметра k уравнение $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|} = kx$ не имеет решение?

Решение.

Построим график функции $y = \frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и найдем значение параметра k , при котором график функции не имеет общих точек с прямой $y = kx$.

Найдем область определения данной функции:

$$x^2 - 4|x| \neq 0,$$

$$|x|(|x| - 4) \neq 0,$$

$$\begin{cases} |x| \neq 0, \\ |x| \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm 4. \end{cases}$$

Преобразуем функцию $y = \frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)}$,

$$y = \frac{1}{|x|},$$

$$y = \left| \frac{1}{x} \right|.$$

Для графика функции $y = \frac{1}{x}$ применим преобразование $y = |f(x)|$. В системе координат построим график данной функции с учетом области определения (рис. 11).

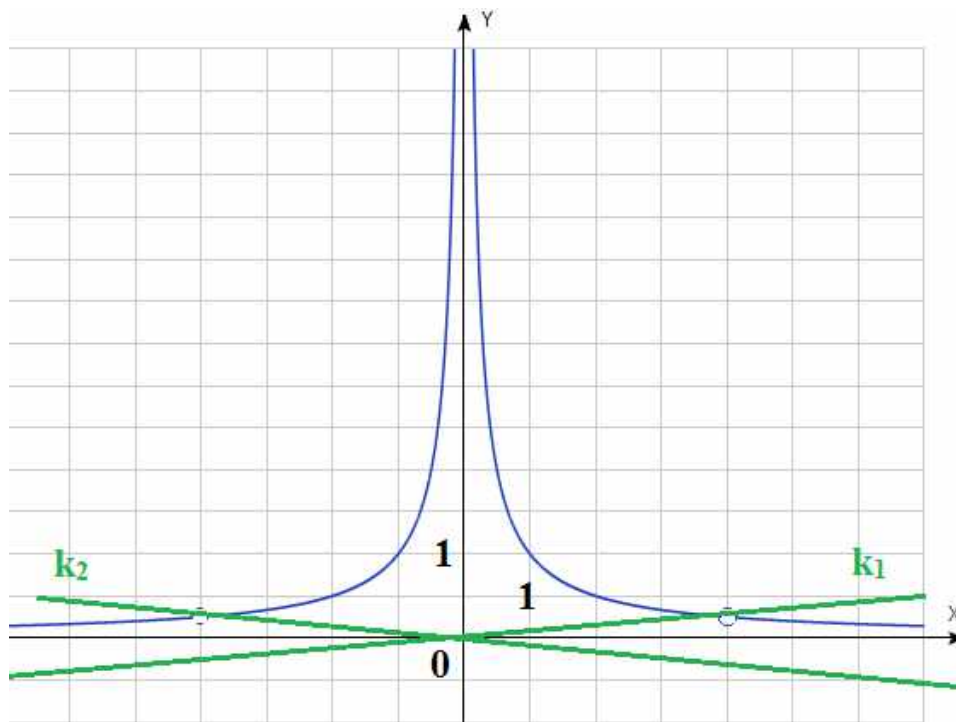


Рис. 11

Прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, т.е. $k = 0$, либо проходит через одну из выколотых точек $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4; \frac{1}{4}\right)$.

Найдем значение параметра k , подставляя координаты выколотых точек в уравнение прямой:

$$\begin{array}{ll} \left(4; \frac{1}{4}\right) & \left(-4; \frac{1}{4}\right) \\ \frac{1}{4} = k \cdot 4 & \frac{1}{4} = k \cdot (-4) \\ k = \frac{1}{16} & k = -\frac{1}{16} \end{array}$$

Таким образом, уравнение не имеет решение при $k \in \left\{-\frac{1}{16}; 0; \frac{1}{16}\right\}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{16}; 0; \frac{1}{16}\right\}$.

Задание 4.

При каких значениях параметра k уравнение $|x - 3| - kx = |x + 3|$ имеет одно решение?

Решение.

Данную задачу можно переформулировать следующим образом: Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и найдите значение k , при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

$$y = \begin{cases} -x + 3 + x + 3, & -3 < x, \\ -x + 3 - x - 3, & -3 \leq x < 3, \\ x - 3 - x - 3, & x > 3; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 6, & -3 < x, \\ -2x, & -3 \leq x < 3, \\ -6, & x > 3. \end{cases}$$

Изобразим график кусочной функции:

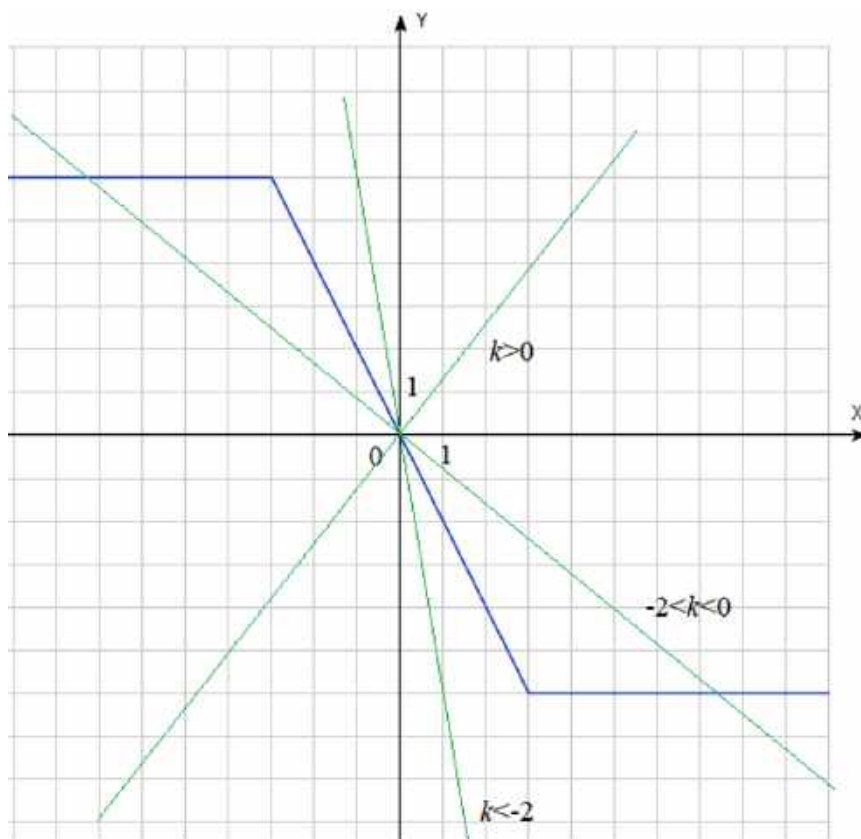


Рис. 12

Если $k < -2$, то прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ в одной точке $(0; 0)$.

Если $k = -2$, то прямая $y = kx$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком функции $y = |x - 3| - |x + 3|$.

Если $-2 < k < 0$, то прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ в трех точках.

Если $k \geq 0$, то прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ в одной точке $(0,0)$.

Таким образом, прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in (-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$.

Примечание. Заметим, что точки, в которых подмодульное выражение равно 0, могут быть отнесены как к промежутку, на котором модуль раскрывается со знаком «плюс», так и к промежутку, на котором модуль раскрывается со знаком «минус».

Ответ: $(-\infty; -2) \cup [0; +\infty)$.

§2. Решение систем уравнений с параметрами

Практические задания

Задание 1.

При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = a, \end{cases}$ имеет

4 решения? 8 решений? Не имеет решений?

Решение.

1) $|x| + |y| = 3$.

Графиком данного уравнения является квадрат с центром в точке $(0; 0)$ и диагональю равной 6 (рис. 13).

2) $x^2 + y^2 = a$.

Графиком уравнения является семейство окружностей с центром $(0; 0)$ и $r = \sqrt{a}$.

Построим графики уравнений:

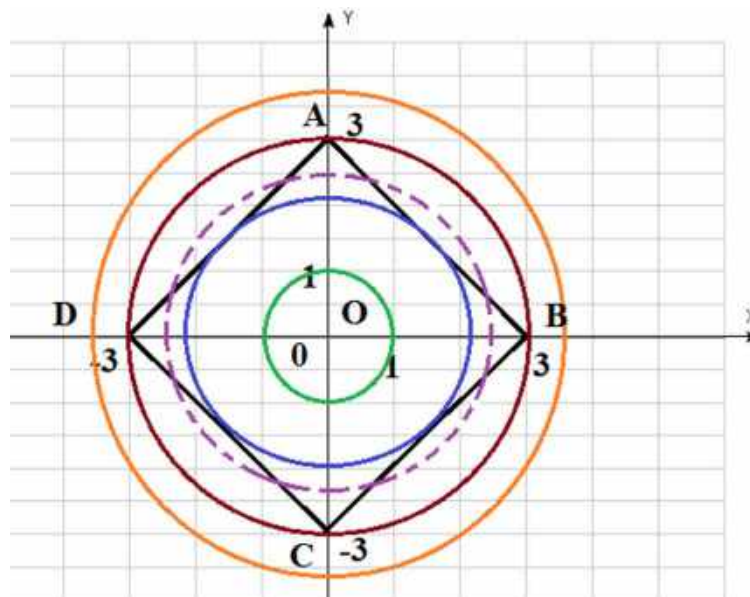


Рис. 13

Найдем, при каких значениях параметра a система уравнений имеет 4 решения:

1 случай: окружность вписана в квадрат:

Рассмотрим $\triangle AOB$ – равнобедренный, прямоугольный:

$$r = \frac{1}{2}AB,$$

$$AB = 3\sqrt{2},$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 4,5.$$

2 случай: окружность описана около квадрата. Тогда диагональ квадрата равна диаметру окружности, т.е. 6.

$$r = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9.$$

Найдем, при каких значениях параметра a система уравнений имеет 8 решений (на рис.13 окружность нарисована пунктиром): $a \in (4,5; 9)$.

Найдем, при каких значениях параметра a система уравнений не имеет решений. В таком случае окружность находится либо внутри квадрата, т.е. радиус меньше радиуса вписанной окружности, либо радиус окружности больше радиуса описанной окружности около квадрата: $a \in [0; 4,5) \cup (9; +\infty)$.

Ответ: нет решений при $a \in [0; 4,5) \cup (9; +\infty)$, 4 решения при $a = \{4,5; 9\}$, 8 решений при $a \in (4,5; 9)$.

Задание 2.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4, \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Преобразуем первое уравнение:

$$2x^2 + 2y^2 - 4xy - xy = 0,$$

$$2x(x - 2y) + y(2y - x) = 0,$$

$$2x(x - 2y) - y(x - 2y) = 0,$$

$$(x - 2y)(2x - y) = 0,$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2}, \\ y = 2x. \end{cases}$$

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4$ – уравнение окружности с центром $(a; a)$, $r = a^2\sqrt{5}$. Заметим, что её центр лежит на прямой $y = x$.

Построим окружность и графики полученных уравнений $y = \frac{x}{2}, y = 2x$ (рис. 14).

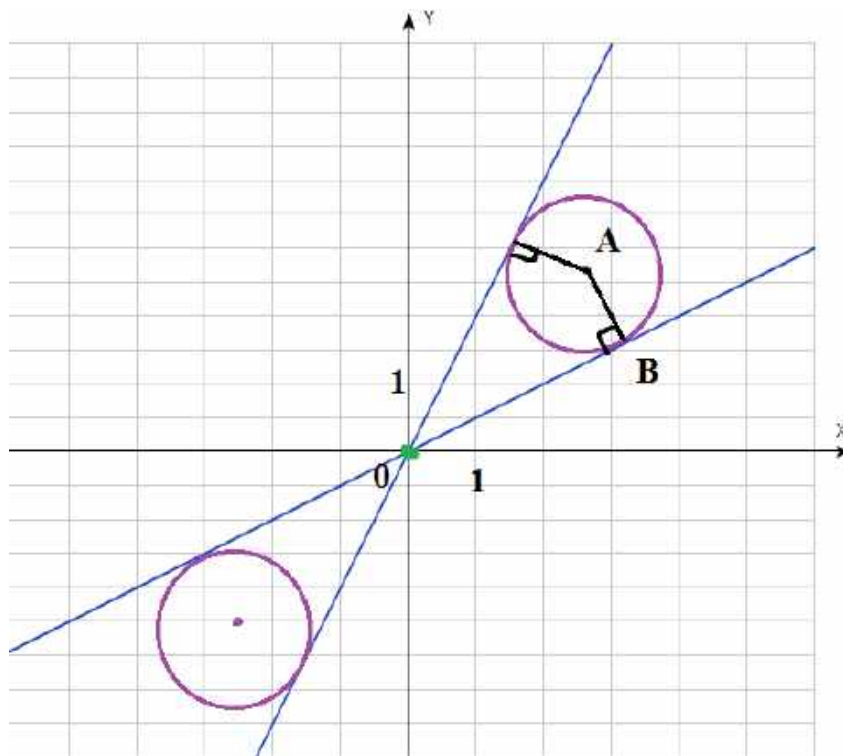


Рис. 14

Рассмотрим несколько случаев относительно значений параметра a .

1 случай: $a = 0$, тогда $x^2 + y^2 = 0$.

Графиком полученного уравнения является точка с координатами $(0; 0)$.

Графики имеют одну общую точку, значит система имеет одно решение.

2 случай: $a \neq 0$.

Система имеет два решения, когда окружность касается прямых. Функции $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ взаимно обратные, поэтому графики симметричны относительно прямой $y = x$. Расстояние от центра окружности, до точек касания с прямыми $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ одинаковое, т.к. равно радиусу окружности, поэтому для отыскания параметра можно взять любое из данных уравнений.

Покажем два способа нахождения параметра a в данном случае.

1 способ.

$$\begin{cases} y = 2x, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4. \end{cases}$$

Найдём параметр a , при котором система имеет одно решение.

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4,$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + 4x^2 - 4ax + a^2 - 5a^4 = 0,$$

$$5x^2 - 6ax + 2a^2 - 5a^4 = 0.$$

Данное уравнение должно иметь один корень, значит $D = 0$.

$$D = 36a^2 - 20(2a^2 - 5a^4),$$

$$36a^2 - 20(2a^2 - 5a^4) = 0,$$

$$36a^2 - 40a^2 + 100a^4 = 0,$$

$$100a^4 - 4a^2 = 0,$$

$$4a^2(25a^2 - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} a = 0, \\ a = \pm \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$a = 0$ – не подходит, т.к. $a \neq 0$.

2 способ.

Найдем радиус по формуле расстояния от точки $A(a; a)$ до прямой.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Запишем уравнение прямой в общем виде: $2x - y = 0$,

тогда $r = AB = \frac{|2a - a + 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}.$

Следовательно, получим уравнение: $\frac{|2a - a + 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = a^2\sqrt{5}.$

Решим уравнение:

$$\frac{|a|}{\sqrt{5}} = a^2\sqrt{5},$$

$$|a| = 5a^2,$$

$$|a| - 5a^2 = 0,$$

$$|a|(1 - 5|a|) = 0,$$

$$\begin{cases} |a| = 0, \\ 1 - 5|a| = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0, \\ a = \pm \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$a = 0$ – не подходит, т.к. $a \neq 0$.

Таким образом, система уравнений имеет 2 решения при $a = \pm \frac{1}{5}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$.

Задание 3.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0, \\ x + y - a = 0, \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

Решение.

Область допустимых значений переменной x системы: $\begin{cases} x < 6, \\ x \geq 2. \end{cases}$

1. Решим уравнение $(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2} = 0$.

$$y^2 - xy + 3x - y - 6 = 0 \quad \text{или} \quad x + 2 = 0$$

$$y^2 - (x+1)y + (3x-6) = 0 \quad x = -2$$

$$D = (x+1)^2 - 4(3x-6)$$

$$D = x^2 + 2x + 1 - 12x + 24$$

$$D = x^2 - 10x + 25$$

$$D = (x-5)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1+|x-5|}{2} = \frac{2x-4}{2} = x-2, \\ y = \frac{x+1-|x-5|}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

2. $y = -x + a$.

Построим графики уравнений $y = x - 2, y = 3, x = -2$ с учетом области допустимых значений переменной x (рис. 15).

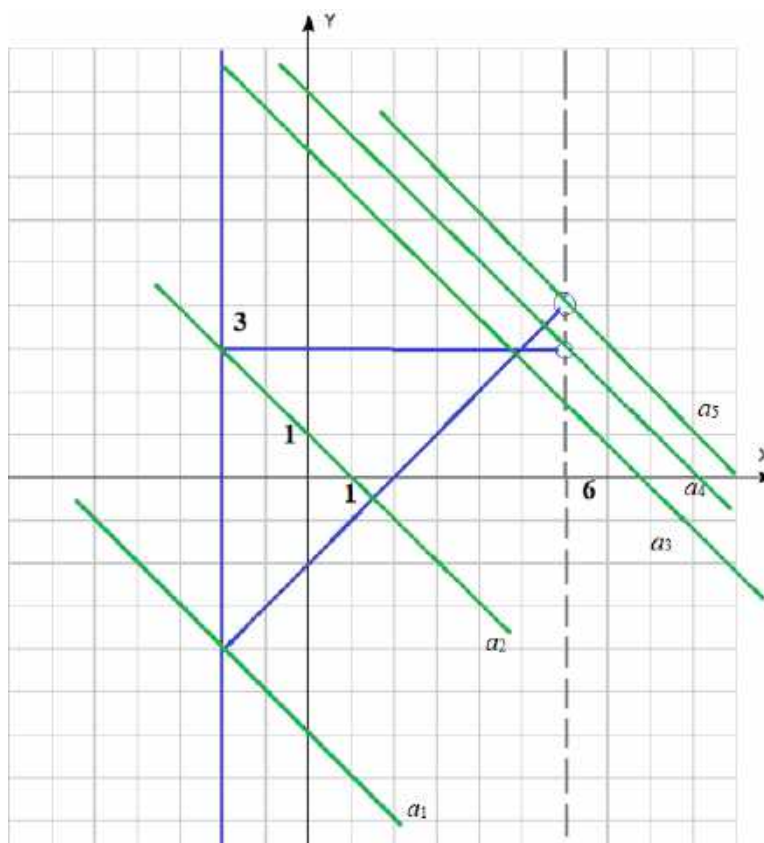


Рис. 15

Полученная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда прямые $y = -x + a$ имеют с графиком решения первого уравнения системы ровно две общие точки. Прямые, соответствующие границам этих случаев, показаны на рисунке.

При $a \leq a_1$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 1 общую точку.

При $a_1 < a \leq a_2$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 2 общие точки.

При $a_2 < a < a_3$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 3 общие точки.

При $a = a_3$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 2 общие точки.

При $a_3 < a < a_4$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 3 общие точки.

При $a_4 \leq a < a_5$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 2 общие точки.

При $a \geq a_5$ прямая $y = -x + a$ имеет с графиком уравнения 1 общую точку.

Искомými значениями параметра являются $a \in (-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$.

Ответ: $(-6; 1] \cup \{8\} \cup [9; 10)$.

Задание 4.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} yx^2 + y^2 = 2y + 63 - 7x^2, \\ x \geq -3, \\ x + y = a, \end{cases} \quad \text{имеет ровно два различных решения.}$$

Решение.

Решим первое уравнение, при этом воспользуемся приемом решения квадратного уравнения, когда $D = d^2$, описанным в теоретической части:

$$y^2 + (x^2 - 2)y - 63 + 7x^2 = 0,$$

$$D = (x^2 - 2)^2 - 4(-63 + 7x^2),$$

$$D = x^4 - 4x^2 + 4 + 252 - 28x^2,$$

$$D = x^4 - 32x^2 + 256 = (x^2 - 16)^2,$$

$$\begin{cases} y = \frac{-x^2 + 2 + |x^2 - 16|}{2} = -7, \\ y = \frac{-x^2 + 2 - |x^2 - 16|}{2} = -x^2 + 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -7, \\ y = -x^2 + 9. \end{cases}$$

Построим графики уравнений $y = -7, y = -x^2 + 9$ с учетом области допустимых значений переменной x (рис. 16).

Полученная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда прямые $y = -x + a$ имеют с графиком решения первого уравнения системы ровно две общие точки.

Первый случай, когда прямая $y = -x + a$ проходит через точку $(-3; 0)$ при $a = -10$ и до точки пересечения прямой $y = -7$ и параболы $y = -x^2 + 9$; это точка $(4; -7)$ при $a = -3$.

$$a \in [-10; -3].$$

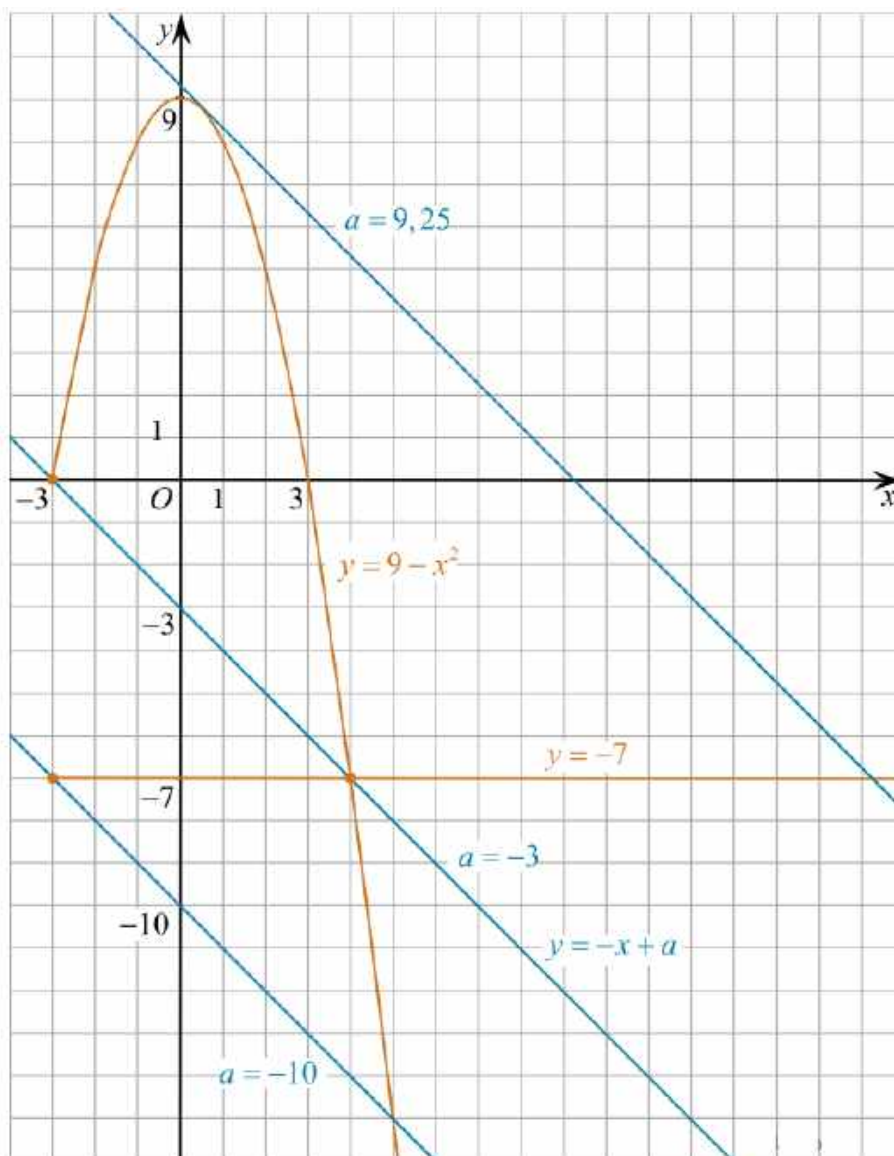


Рис. 16

Второй случай, когда прямая $y = -x + a$ касается параболы. Для этого решим систему, которая должна иметь одно решение:

$$\begin{cases} y = -x + a, \\ y = -x^2 + 9; \end{cases}$$

$$-x^2 + 9 = -x + a,$$

$$-x^2 + x + 9 - a = 0.$$

Данное уравнение должно иметь одно решение. Для этого $D = 0$.

$$D = 1 + 4(9 - a),$$

$$1 + 4(9 - a) = 0,$$

$$-4a + 37 = 0,$$

$$a = 9,25.$$

Ответ: $[-10; -3] \cup \{9,25\}$.

Задание 5.

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{x+4}} = 0, \\ y = ax, \end{cases} \text{ имеет ровно два различных решения.}$$

Решение.

Область допустимых значений переменной x системы: $x > -4$.

1. Решим уравнение:

$$xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0,$$

$$xy(y - 2) - 4(y - 2) = 0,$$

$$(y - 2)(xy - 4) = 0,$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ y = \frac{4}{x}. \end{cases}$$

Построим графики уравнений $y = 2, y = \frac{4}{x}$ на области допустимых значений переменной x (рис. 17).

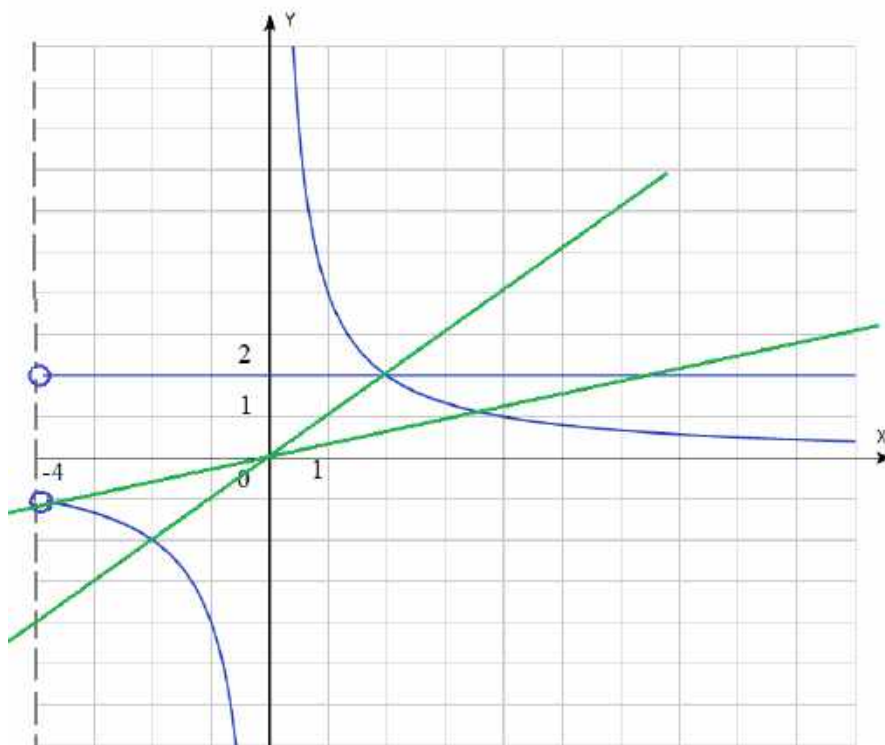


Рис. 17

Полученная система имеет ровно два решения в том и только в том случае,

когда прямые $y = ax$ имеют с графиком решения первого уравнения системы ровно две общие точки.

Первый случай, когда прямая $y = ax$ совпадает с Ox и до точки $(-4; -1)$.

Подставим координаты точки $(-4; -1)$ в уравнение $y = ax$:

$$-1 = -4a,$$

$$a = \frac{1}{4},$$

$$a \in (0; \frac{1}{4}].$$

Второй случай, когда прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$:

$$\frac{4}{x} = 2,$$

$$x = 2,$$

$$(2; 2)$$

Подставим координаты точки в уравнение $y = ax$:

$$2 = 2a,$$

$$a = 1.$$

Таким образом, $a \in (0; \frac{1}{4}] \cup \{1\}$.

Ответ: $(0; \frac{1}{4}] \cup \{1\}$.

§3. Решение задач с параметрами в системе координат xOa

Практические задания

Задание 1.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{4x^2 - (4a + 1)x + a}$ имеет один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение.

Данное уравнение не содержит переменную y , поэтому целесообразно решить его графически в системе xOa .

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 - a^2})^2 = (\sqrt{4x^2 - (4a + 1)x + a})^2, \\ x^2 - a^2 \geq 0; \\ \begin{cases} x^2 - a^2 = 4x^2 - (4a + 1)x + a, \\ x^2 - a^2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Найдем множество решений неравенства:

$$x^2 - a^2 \geq 0,$$

$$(x - a)(x + a) \geq 0.$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - a \geq 0, \\ x + a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x, \\ a \geq -x, \end{cases} \\ \begin{cases} x - a \leq 0, \\ x + a \leq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x, \\ a \leq -x. \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{4x^2 - (4a + 1)x + a},$$

$$x^2 - a^2 = 4x^2 - (4a + 1)x + a,$$

$$3x^2 - (4a + 1)x + a + a^2 = 0,$$

$$D = (4a + 1)^2 - 12(a + a^2),$$

$$D = 16a^2 + 8a + 1 - 12a - 12a^2,$$

$$D = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2.$$

Для нахождения корней воспользуемся приемом решения квадратного уравнения, когда $D = d^2$, описанным в теоретической части:

$$\begin{cases} x = \frac{4a + 1 + |2a - 1|}{6} = \frac{6a}{6} = a, \\ x = \frac{4a + 1 - |2a - 1|}{6} = \frac{2a + 2}{6} = \frac{a + 1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x, \\ a = 3x - 1. \end{cases}$$

Построим график уравнений $a = x, a = 3x - 1$ в найденной области на отрезке $[0; 1]$ (рис. 18).

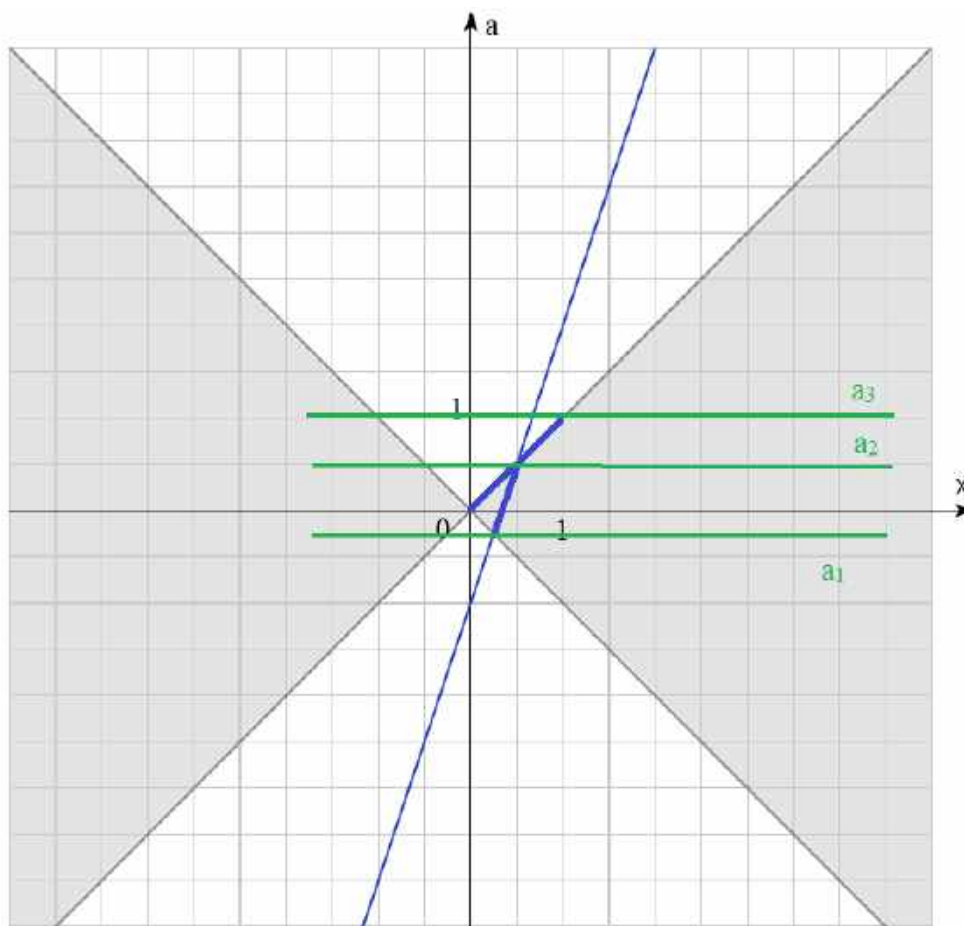


Рис. 18

Для того, чтобы уравнение имело одно решение, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решения уравнения одно пересечение.

Найдем значение a_1 как пересечение двух прямых:

$$\begin{cases} a = -x, \\ a = 3x - 1, \end{cases}$$

$$a = -3a - 1,$$

$$4a = -1,$$

$$a = -\frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = 1.$$

Таким образом, $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Задание 2.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (x - 1)\sqrt{3x - a} = x$ имеет один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение.

Данное уравнение не содержит переменную y , поэтому целесообразно решить его графически в системе xOa .

Область допустимых значений переменных данного уравнения:

$$3x - a \geq 0,$$

$$a \leq 3x.$$

График данного уравнения будет лежать в области, которая находится не выше прямой $a = 3x$.

Решим уравнение $x^2 - (x - 1)\sqrt{3x - a} = 0$:

$$x(x - 1) - (x - 1)\sqrt{3x - a} = 0,$$

$$(x - 1)(x - \sqrt{3x - a}) = 0,$$

$$x - 1 = 0, \quad \text{или} \quad x - \sqrt{3x - a} = 0,$$

$$x = 1. \quad \sqrt{3x - a} = x, x \geq 0,$$

$$3x - a = x^2,$$

$$a = -x^2 + 3x.$$

Графиком уравнения $a = -x^2 + 3x$ является парабола. Найдем координаты вершины:

$$x_0 = \frac{-3}{-2} = 1,5,$$

$$a_0 = -2,25 + 4,5 = 2,25.$$

$(1,5; 2,25)$ – координаты вершины параболы.

Построим графики уравнений $a = -x^2 + 3x, x = 1$ в найденной области на отрезке $[0; 1]$ (рис. 19).

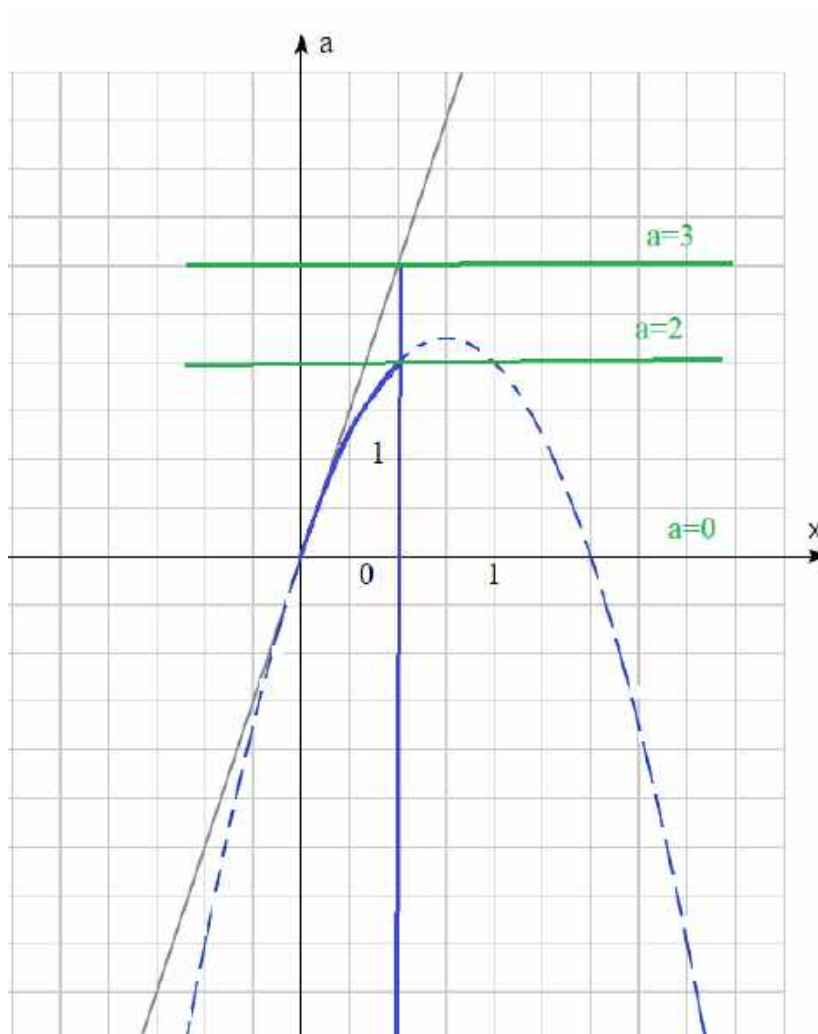


Рис. 19

Иногда по графику сложно определить количество точек пересечения, как в данном – точек пересечения параболы и прямой на области допустимых значений переменной данного уравнения. Тогда целесообразно составить соответствующую систему и найти количество точек аналитически.

$$\begin{cases} a = -x^2 + 3x, \\ a = 3x; \end{cases}$$

$$-x^2 + 3x = 3x,$$

$$-x^2 = 0,$$

$$x = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Таким образом, убеждаемся, что у данных графиков уравнений одна общая точка.

Для того, чтобы уравнение имело одно решение, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решения уравнения одно пересечение.

Таким образом, $a \in (-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

Задание 3.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$ имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$.

Решение.

Данное уравнение не содержит переменную y , поэтому целесообразно решить его графически в системе xOa .

Область допустимых значений переменных данного уравнения:

$$10x - x^2 - a^2 > 0,$$

$$x^2 + a^2 - 10x < 0,$$

$$x^2 - 10x + 25 + a^2 < 25,$$

$$(x - 5)^2 + a^2 < 25.$$

Заметим, что областью допустимых значений является часть плоскости, находящаяся внутри круга с центром $(5; 0)$ и радиусом 5.

Решим уравнение:

$$(x - a - 7)(x + a - 2) = 0,$$

$$\begin{cases} x - a - 7 = 0, \\ x + a - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x - 7, \\ a = -x + 2. \end{cases}$$

Построим графики функций $a = x - 7, a = -x + 2$ в найденной области (рис. 20).

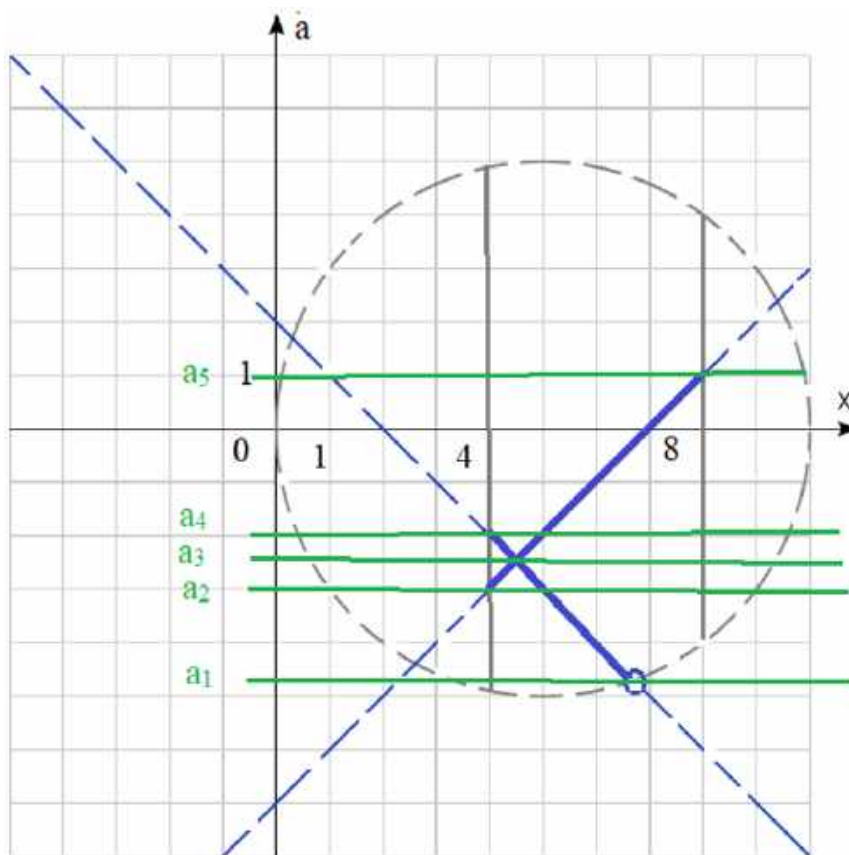


Рис. 20

Найдем значение a_1 . Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 10x - x^2 - a^2 = 0, \\ x + a - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 - a^2 = 0, \\ x = 2 - a; \end{cases}$$

$$10(2 - a) - (2 - a)^2 - a^2 = 0,$$

$$20 - 10a - 4 + 4a - a^2 - a^2 = 0,$$

$$2a^2 + 6a - 16 = 0,$$

$$a^2 + 3a - 8 = 0,$$

$$D = 9 + 32 = 41,$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}, \\ a = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Значит, } a_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2}.$$

Найдем значение a_2 как пересечение прямых $x = 4$ и $a = x - 7$. Тогда $a_2 = -3$.

Найдем значение a_3 как пересечение прямых $a = -x + 2$ и $a = x - 7$. Тогда $a_3 = -2,5$.

Найдем значение a_4 как пересечение прямых $x = 4$ и $a = -x + 2$. Тогда $a_4 = -2$.

Найдем значение a_5 как пересечение прямых $x = 8$ и $a = x - 7$. Тогда $a_5 = 1$.

Для того, чтобы уравнение имело одно решение, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решения уравнения одно пересечение.

Таким образом, $a \in \left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \{2,5\} \cup (-2; 1]$.

Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \{2,5\} \cup (-2; 1]$.

Задание 4.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a} \cos x = \sqrt{x-a}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет ровно один корень.

Решение.

Область допустимых значений переменной данного уравнения: $a \leq x$.

Решим уравнение $\sqrt{x-a}(\cos x - 1) = 0$:

$$\begin{array}{lll} a = x & \text{или} & \cos x - 1 = 0, \\ & & \cos x = 1, \\ & & x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Выполним отбор корней из $[-\pi; \pi]$: $x = 0$.

Построим графики уравнений $a = x$ и $x = 0$ в найденной области (рис. 21).

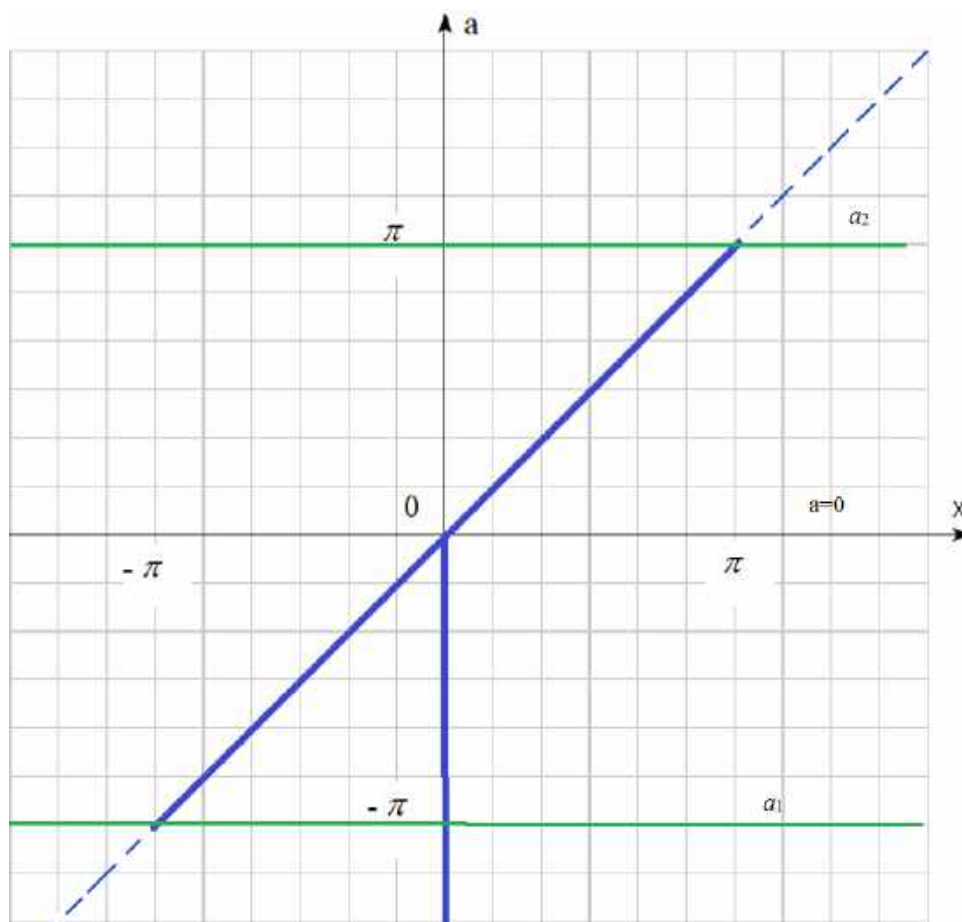


Рис. 21

Для того, чтобы уравнение имело одно решение, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решений уравнения одно пересечение.

При $a < a_1$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком одно пересечение.

При $a_1 \leq a < 0$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком два пересечения.

При $0 \leq a \leq a_2$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком одно пересечение.

Таким образом, $a \in (-\infty; -\pi) \cup [0; \pi]$.

Ответ: $(-\infty; -\pi) \cup [0; \pi]$.

Задание 5.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x + 1)a^2 + (x^3 + 2x^2 + x)a + x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$ имеет ровно 2 решения.

Решение.

Разложим на множители:

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2.$$

Найдём корни многочлена $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Заметим, что $x = 1$ является корнем многочлена.

Разложим данный многочлен по схеме Горнера:

	1	2	0	-2	-1
1	1	$1 \cdot 1 + 2 = 3$	$1 \cdot 3 + 0 = 3$	$1 \cdot 3 - 2 = 1$	$1 \cdot 1 - 1 = 0$

Следовательно, $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) =$
 $= (x - 1)(x + 1)^3.$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению:

$$(x + 1)a^2 + x(x + 1)^2a + (x - 1)(x + 1)^3 = 0,$$

$$(x + 1)(a^2 + x(x + 1)a + (x - 1)(x + 1)^2) = 0,$$

$$x + 1 = 0, \quad \text{или} \quad a^2 + x(x + 1)a + (x - 1)(x + 1)^2 = 0,$$

$$x = -1. \quad D = x^2(x + 1)^2 - 4(x - 1)(x + 1)^2 =$$

$$= (x + 1)^2(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)^2(x - 2)^2$$

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{-x(x+1) + |(x+1)(x-2)|}{2}, \\ a &= \frac{-x(x+1) - |(x+1)(x-2)|}{2}; \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{-x(x+1) + (x+1)(x-2)}{2}, \\ a &= \frac{-x(x+1) - (x+1)(x-2)}{2}; \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} a &= \frac{-x^2 - x + x^2 - x - 2}{2}, \\ a &= \frac{-x^2 - x - x^2 + x + 2}{2}; \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} a &= -x - 1, \\ a &= -x^2 + 1. \end{aligned} \right.$$

Построим графики уравнений $x = -1, a = -x^2 + 1, a = -x - 1$ в системе xOa (рис. 22).

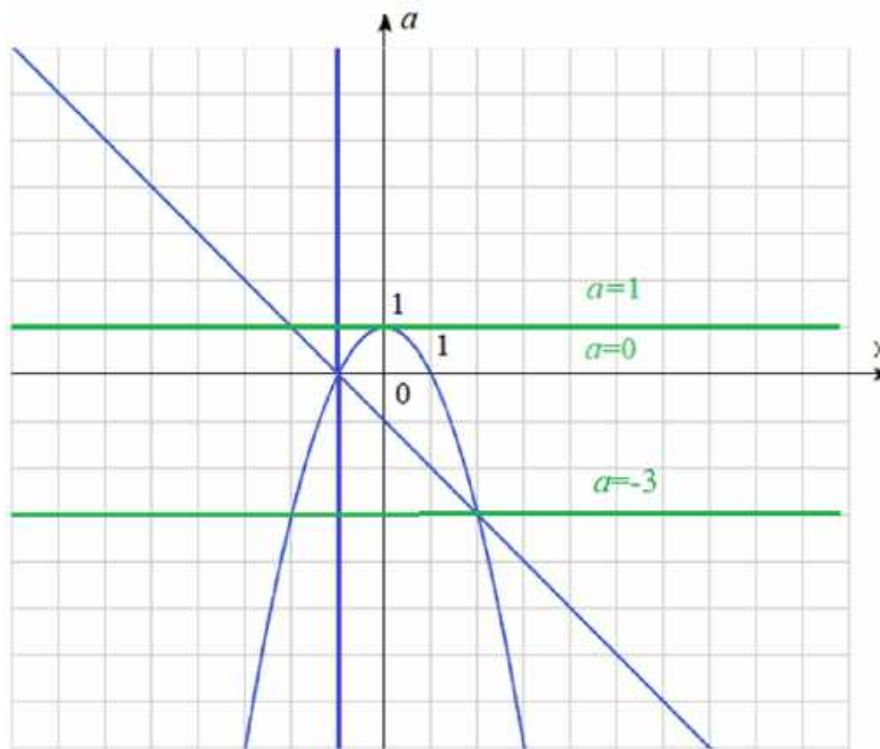


Рис. 22

Для того, чтобы уравнение имело два решения, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решений уравнения два пересечения.

При $a < -3$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком четыре пересечения.

При $a = -3$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком три пересечения.

При $-3 < a < 0$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком три пересечения.

При $a = 0$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком два пересечения.

При $0 < a < 1$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком четыре пересечения.

При $a = 1$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком три пересечения.

При $a > 1$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком два пересечения.

Таким образом, $a \in \{0\} \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $\{0\} \cup (1; +\infty)$.

§4. Решение неравенств с параметрами

Практические задания

Задание 1.

Найдите все значения параметра $a \neq 0$ такие, что неравенство $\log_2^2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1) - \log_2 \frac{a^2}{6} \cdot \log_2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1) \leq 0$ не имеет решений.

Решение.

Преобразуем данное неравенство:

$$\log_2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1)(\log_2(x^2 + 2ax + a^2 - a + 1) - \log_2 \frac{a^2}{6}) \leq 0,$$

$$\log_2((x + a)^2 - a + 1)(\log_2((x + a)^2 - a + 1) - \log_2 \frac{a^2}{6}) \leq 0.$$

Сделаем замену: $x + a = t$.

$$\log_2(t^2 - a + 1)(\log_2(t^2 - a + 1) - \log_2 \frac{a^2}{6}) \leq 0.$$

Применим метод рационализации на области допустимых значений переменных неравенства:

$$\begin{cases} t^2 - a + 1 > 0, \\ a \neq 0, \\ (t^2 - a + 1 - 1)(t^2 - a + 1 - \frac{a^2}{6}) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - a + 1 > 0, \\ a \neq 0, \\ (t^2 - a)(6t^2 - 6a + 6 - a^2) \leq 0. \end{cases}$$

1. Если $a > 0$, то одно из решений системы имеет вид $t = \sqrt{a}$ (при подстановке в систему каждое неравенство верно). Значит при любом положительном a , система имеет решение.

2. Если $a < 0$, то первое неравенство верно и система равносильна неравенству:

$$6t^2 - 6a + 6 - a^2 \leq 0,$$

$$6t^2 \leq 6a - 6 + a^2.$$

Неравенство не имеет решений, когда $a - 6 + a^2 < 0$,

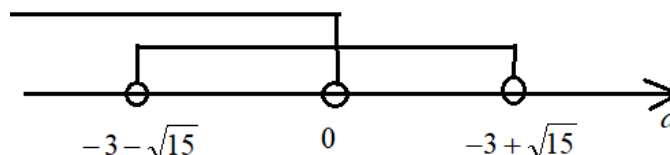
$$a^2 + 6a + 9 - 9 - 6 < 0,$$

$$(a + 3)^2 - 15 < 0,$$

$$(a + 3 - \sqrt{15})(a + 3 + \sqrt{15}) < 0,$$

$$-3 - \sqrt{15} < a < -3 + \sqrt{15}.$$

Найдем решение данного неравенства с учетом ограничений параметра a :



Таким образом, $a \in (-3 - \sqrt{15}; 0)$.

Ответ: $(-3 - \sqrt{15}; 0)$.

Задание 2.

Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $|\cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1 - a) \sin^2 x| \leq 1,5$ выполняется для любого действительного числа x .

Решение.

Раскроем модуль по свойству неравенств:

$$\begin{cases} \cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1 - a) \sin^2 x \leq 1,5, \\ \cos^2 x + 0,5 \sin 2x + (1 - a) \sin^2 x \geq -1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x + 0,5 \sin 2x + \sin^2 x - a \sin^2 x \leq 1,5, \\ \cos^2 x + 0,5 \sin 2x + \sin^2 x - a \sin^2 x \geq -1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x \leq 1,5, \\ 1 + \sin x \cos x - a \sin^2 x \geq -1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cos x - a \sin^2 x \leq 0,5, \\ \sin x \cos x - a \sin^2 x \geq -2,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cos x - a \sin^2 x \leq 0,5(\sin^2 x + \cos^2 x), \\ \sin x \cos x - a \sin^2 x \geq -2,5(\sin^2 x + \cos^2 x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cos x - a \sin^2 x \leq 0,5 \sin^2 x + 0,5 \cos^2 x, \\ \sin x \cos x - a \sin^2 x \geq -2,5 \sin^2 x - 2,5 \cos^2 x. \end{cases}$$

Если $\sin x = 0$, то $\begin{cases} 0 \leq 0,5 \cos^2 x, \\ 0 \geq -2,5 \cos^2 x. \end{cases}$

Тогда оба неравенства верны, в частности когда $\cos x = 0$. Значение синуса

и косинуса не могут равняться нулю для одного аргумента. Рассмотрим случай, когда $\sin x \neq 0$. Разделим каждое неравенство на $\sin^2 x$:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x - a \leq 0,5 + 0,5 \operatorname{ctg}^2 x, \\ \operatorname{ctg} x - a \geq -2,5 - 2,5 \operatorname{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Выполним замену $\operatorname{ctg} x = t$:

$$\begin{cases} t - a \leq 0,5 + 0,5t^2, \\ t - a \geq -2,5 - 2,5t^2; \\ a \geq -0,5 - 0,5t^2 + t, \\ a \leq 2,5 + 2,5t^2 + t. \end{cases}$$

Построим множество решений каждого неравенства в системе tOa .

$$a = -0,5t^2 + t - 0,5$$

$$a = 2,5t^2 + t + 2,5$$

$$t_0 = \frac{-1}{-2 \cdot 0,5} = 1$$

$$t_0 = \frac{-1}{2 \cdot 2,5} = -\frac{1}{5}$$

$$a_0 = 0,5 - 1 + 0,5 = 0$$

$$a_0 = 2,5 \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + 2,5 = \frac{12}{5}$$

На рисунке 23 множество решений последней системы выделено серым цветом.

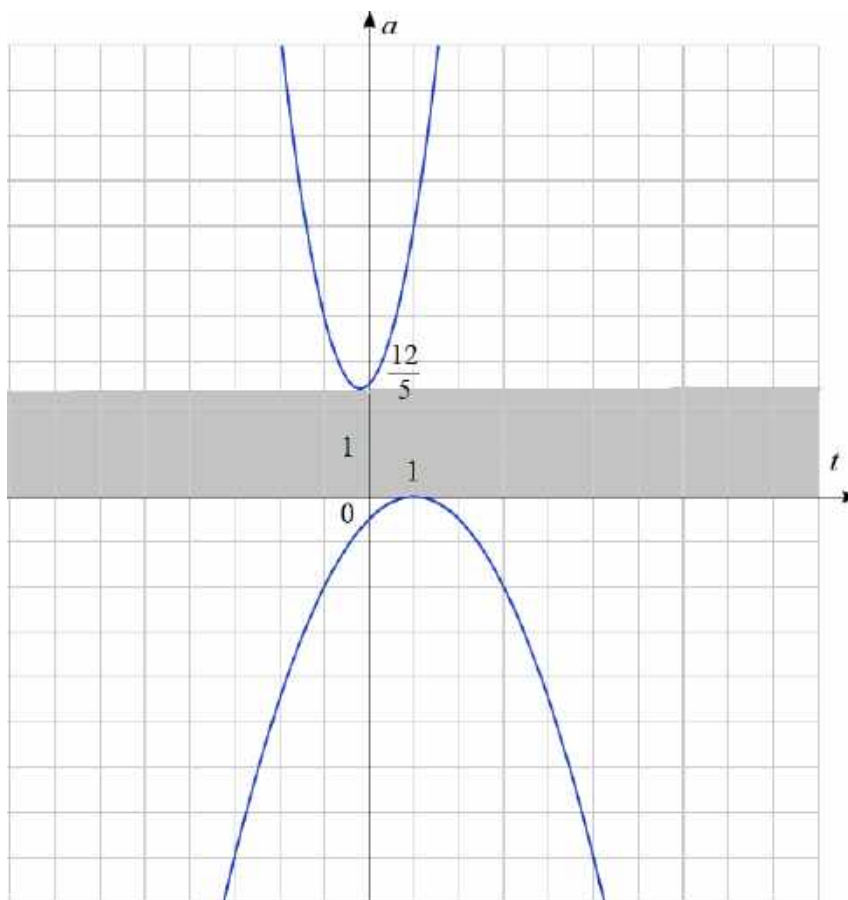


Рис. 23

Для того, чтобы неравенство имело решение при любом значении аргумента, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси t имели с областью решения неравенства пересечение для любой точки плоскости.

При $\begin{cases} a < 0, \\ a > \frac{12}{5}, \end{cases}$ прямая, параллельная оси t не во всех точках плоскости имеет

с областью решения неравенства пересечение.

При $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$ прямая, параллельная оси t во всех точках плоскости имеет с областью решения неравенства пересечение.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для любого действительного числа x , если $a \in \left[0; \frac{12}{5}\right]$.

Ответ: $\left[0; \frac{12}{5}\right]$.

Задание 3.

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $(4|x| - a - 3)(x^2 - 2x - 2 - a) \leq 0$ имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4; 4]$.

Решение.

Решим неравенство через совокупность двух систем:

$$\begin{cases} 4|x| - a - 3 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 2 - a \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4|x| - a - 3 \leq 0, \\ x^2 - 2x - 2 - a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 4|x| - 3, \\ a \geq x^2 - 2x - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 4|x| - 3, \\ a \leq x^2 - 2x - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 4|x| - 3, \\ a \geq (x - 1)^2 - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 4|x| - 3, \\ a \leq (x - 1)^2 - 3. \end{cases}$$

Построим область решения неравенства в системе xOa (рис. 24).

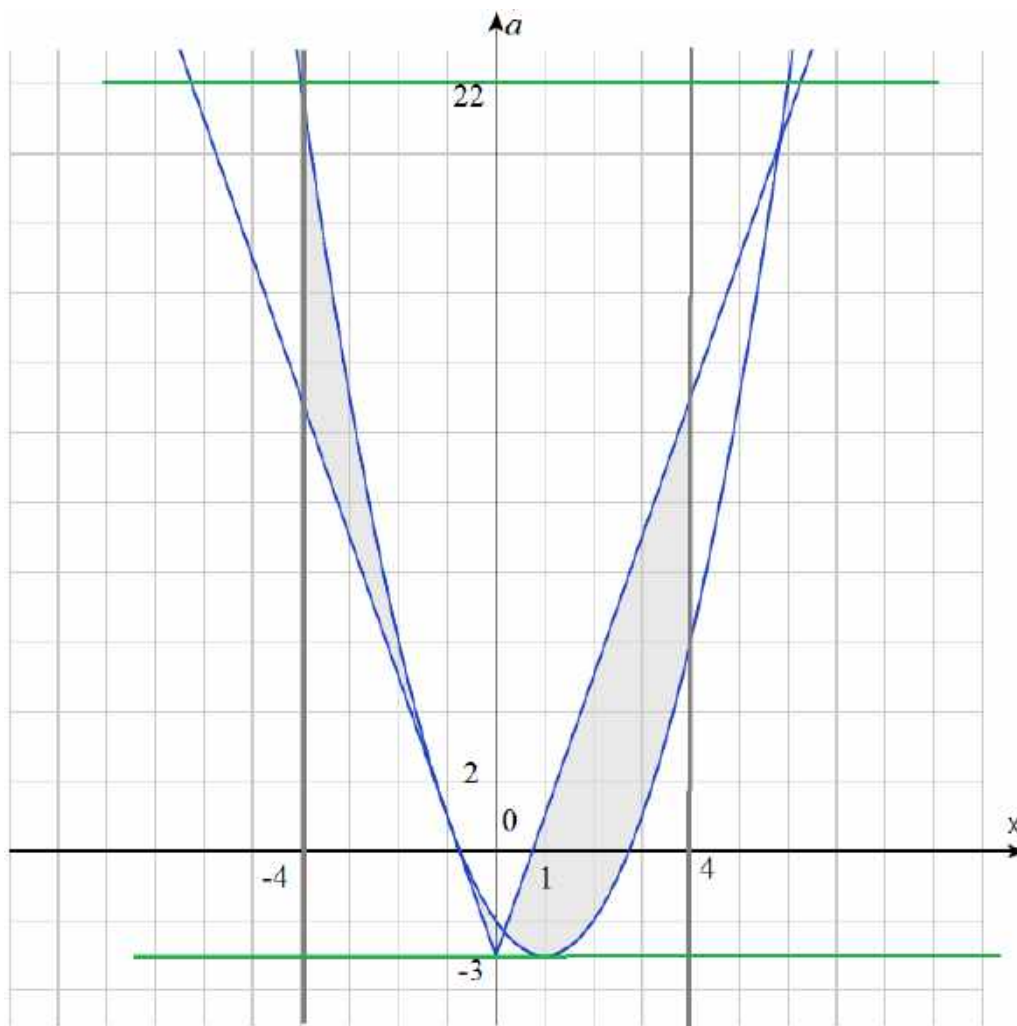


Рис. 24

Для того, чтобы неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решений уравнения хотя бы одно пересечение.

Таким образом, $a \in [-3; 22]$.

Ответ: $[-3; 22]$.

Задание 4.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\ln(x^2 + a^2) \cdot (x^2 - a - 1)\sqrt{x - a + 1} \leq 0$ имеет ровно одно или два решения.

Решение.

Найдем область допустимых значений переменных данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + a^2 > 0, \\ x - a + 1 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + a^2 > 0, \\ a \leq x + 1. \end{cases}$$

В системе координат xOa этой системе соответствуют все точки, лежащие не выше прямой $a = x + 1$ за исключением точки $(0; 0)$.

Перейдём к решению данного неравенства:

$$\begin{cases} \ln(x^2 + a^2) \geq 0, \\ x^2 - a - 1 \leq 0, \\ \ln(x^2 + a^2) \leq 0, \\ x^2 - a - 1 \geq 0, \\ x - a + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + a^2 \geq 1, \\ a \geq x^2 - 1, \\ x^2 + a^2 \leq 1, \\ a \leq x^2 - 1, \\ x - a + 1 = 0; \end{cases}$$

$x^2 + a^2 = 1$ – уравнение окружности, с центром $(0; 0)$ и радиусом 1.

$a = x^2 - 1$ – графиком уравнения является парабола с вершиной $(0; -1)$.

Построим решение данного неравенства на области допустимых значений переменных (Рис. 25).

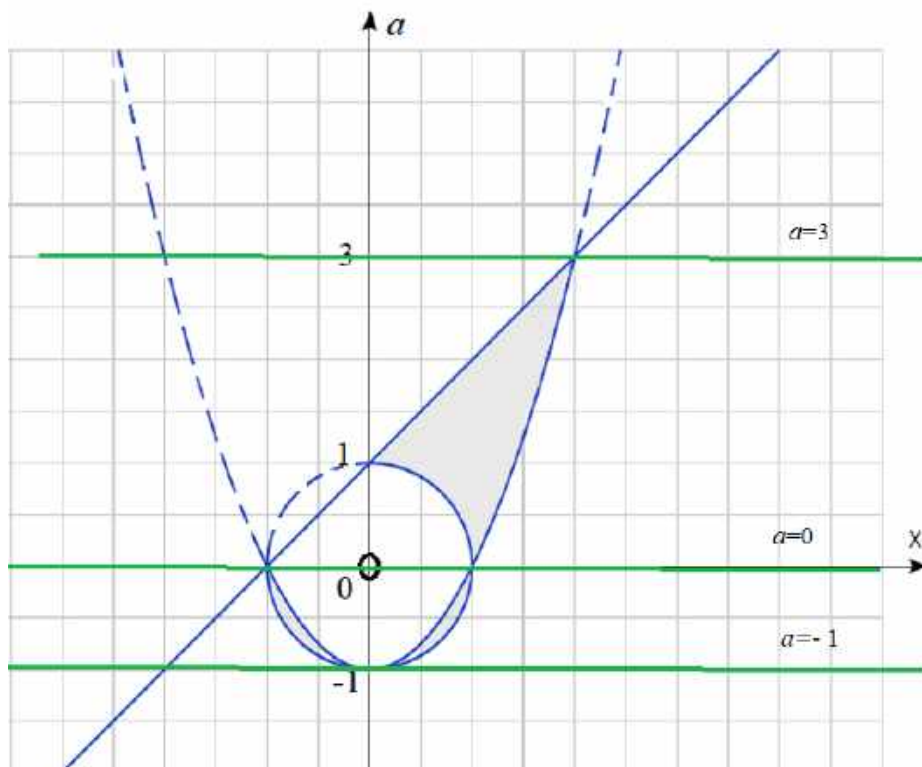


Рис. 25

Для того, чтобы неравенство имело одно или два решения, необходимо,

чтобы прямые, параллельные оси Ox имели с графиком решений уравнения одно или два пересечения.

При $a \leq -1$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком одно пересечение.

При $-1 < a < 0$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком более двух пересечений.

При $a = 0$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком два пересечения.

При $0 < a < 3$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком более двух пересечений.

При $a \geq 3$ прямая, параллельная оси Ox имеет с графиком одно пересечение.

Таким образом $a \in (-\infty; 1] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$.

РАЗДЕЛ 2.

Разные приемы решения уравнений и неравенств с параметрами

Цель данного раздела – создание условий для формирования у читателя умений решать разнообразные уравнения и неравенства с параметрами, выбирая наиболее целесообразные приемы и способы решений. В связи с этим все параграфы раздела 2 имеют следующую структуру:

- *Теоретическая справка*, призванная напомнить читателю основные определения, свойства и т.п., применяемых при решении заданий с параметрами тем или иным методом, а также дополненная в отдельных параграфах тестом с самоконтролем;
- *Практические задания*, имеющие подробные решения, которые позволяют разобраться с практическим применением теории;
- *Задания для самостоятельной работы* с решениями или ответами, помогающие осуществлять самоконтроль.

§1. Решение уравнений и неравенств с параметрами с помощью монотонности функций

Теоретическая справка

В нижеследующей таблице 1 приведены формулировки определений монотонных функций и утверждений, связанных с возрастающей функцией, а также представлены символьные записи этих определений и утверждений.

Таблица 1

№	Словесная формулировка определения, свойств монотонных функций	Символьная формулировка
Определения		
А	Функция $f(x)$ называется <i>возрастающей</i> на промежутке I , если для	$(f(x) \text{ — возрастает на } I) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

	любых чисел x_1 и x_2 из промежутка I таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.	
В	Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I , если для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка I таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.	$(f(x) \text{ — убывает на } I) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in I)(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
С	Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке.	
<i>Свойства монотонных функций</i> (предполагается, что все функции определены на некотором промежутке I)		
Д	Сумма нескольких возрастающих функций на I является возрастающей функцией на этом промежутке (что нельзя сказать о разности функций)	$(\forall n \in \mathbb{N})(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \text{ — возр. на } I \rightarrow$ $\rightarrow f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \text{ — возр. на } I)$
Е	Произведение неотрицательных возрастающих функций на I есть возрастающая функция на этом промежутке.	$(\forall n \in \mathbb{N})(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \text{ — неотриц. и возр. на } I \rightarrow$ $\rightarrow f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) \text{ — возр. на } I)$
Ф	Если функция f возрастает на I , то функция cf (c — число, $c > 0$) возрастает на I , а cf ($c < 0$) убывает на I и $f+c$ (c — любое число) возрастает на I .	$(\forall c > 0)(f(x) \text{ — возр. на } I \rightarrow cf(x) \text{ — возр. на } I)$ $(\forall c < 0)(f(x) \text{ — возр. на } I \rightarrow cf(x) \text{ — убыв. на } I)$ $(\forall c)(f(x) \text{ — возр. на } I \rightarrow f(x) + c \text{ — возр. на } I)$

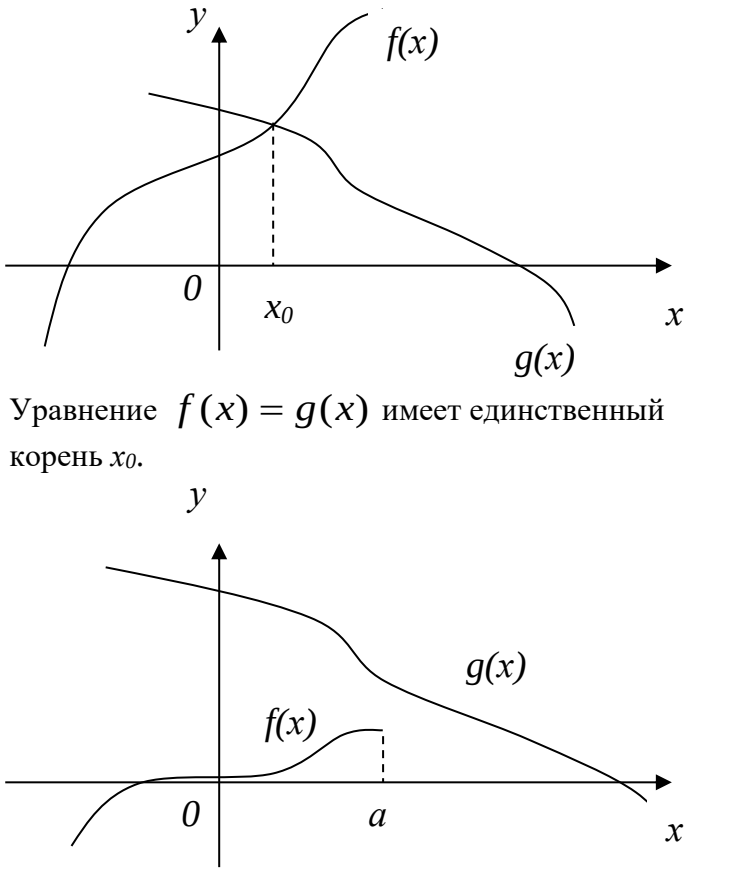
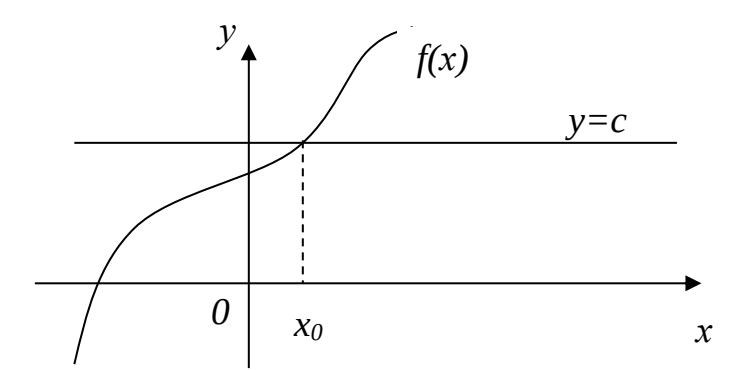
G	Если функция f возрастает и сохраняет знак на I , то функция $\frac{1}{f}$ убывает на этом промежутке.	$(f(x) - \text{возр. и } f(x) > 0 \text{ (} f(x) < 0 \text{) на } I \rightarrow \rightarrow \frac{1}{f(x)} - \text{убыв. на } I)$
I	Если функция f возрастает и неотрицательна на I , то f^n , где $n \in \mathbb{N}$, также возрастает на I .	$(\forall n \in \mathbb{N})(f(x) - \text{неотриц. и возр. на } I \rightarrow f^n(x) - \text{возр. на } I)$
K	Если функция f возрастает на I и n – нечетное число, то f^n также возрастает на I .	$(\forall n \in \mathbb{N})(n - \text{нечет. и } f(x) - \text{возр. на } I \rightarrow f^n(x) - \text{возр. на } I)$
L	Композиция $g(f(x))$ возрастающих функций f и g на I также возрастает на I .	$(f(x) \text{ и } g(x) - \text{возр. на } I \rightarrow g(f(x)) - \text{возр. на } I)$
M	Композиция $g(f(x))$ убывающей f и возрастающей g функций на I является убывающей функцией на I .	$(f(x) - \text{убыв. и } g(x) - \text{возр. на } I \rightarrow g(f(x)) - \text{убыв. на } I)$

Аналогичные утверждения формулируются и для убывающей функции.

Прием использования монотонности функций при решении уравнений и неравенств, в том числе с параметрами, основывается на факте того, что строго монотонная на промежутке функция принимает каждое свое значение ровно один раз.

При решении уравнений и неравенств с использованием монотонности функций используются *утверждения*, представленные в таблице 2:

Таблица 2

№	Словесная формулировка утверждения	Графическая интерпретация
1.	Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на некотором множестве M и $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на этом промежутке.	 Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень x_0. Уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет корней на области определения уравнения $(-\infty; a]$.
2.	Если f – монотонная на некотором промежутке функция, то уравнение $f(x) = c$ (c – константа) имеет не более одного корня на этом промежутке.	 Уравнение $f(x) = c$ имеет единственный корень x_0.

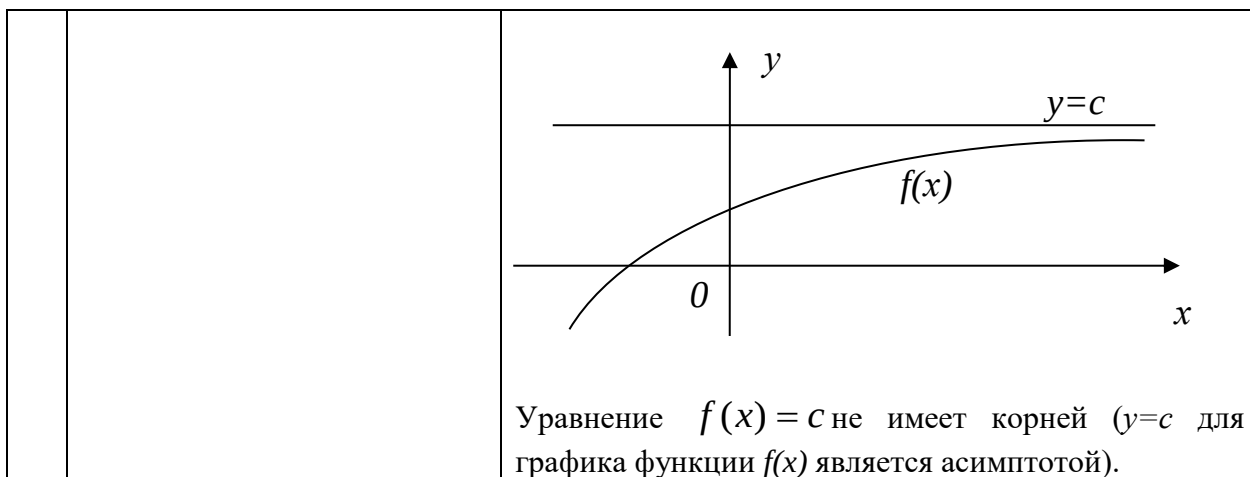


Таблица 2 может играть роль наглядной ориентировочной основы действий (ООД) для формирования у школьников умений использовать монотонность функций при решении уравнений и неравенств там, где это необходимо.

Решение уравнений вида $f(x) = f(y)$ (1) с использованием свойства монотонности, основывается на следующей *теореме*: если функция $y = f(x)$ строго монотонна на промежутке X , то на этом промежутке уравнение (1) равносильно уравнению $y = x$. Аналогичную теорему можно сформулировать для неравенств.

Прием можно применить для решения следующих видов уравнений:

- уравнения, в обеих частях которых стоят функции разных видов;
- уравнения, в одной части которых убывающая, а в другой – возрастающая на данном промежутке функции;
- уравнения, в одной из частей которых – возрастающая или убывающая функция, а в другой – постоянная, т.е. число.

Практические задания

Задание 1.

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых любое решение уравнения $4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 2p + 3\log_2(3x - 1) = 0$ принадлежит отрезку $[1; 3]$.

Решение.

Заметим, что функции $y = \sqrt[3]{t}$, $t = 3,5x - 2,5$, $y = \log_2 u$, $u = 3x - 1$ возрастающие и непрерывные на своей области определения, следовательно, по

соответствующим свойствам возрастающих и непрерывных функций функция $y = 4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1)$ является возрастающей и непрерывной функцией на своей области определения.

Обратимся к уравнению $4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 2p + 3\log_2(3x - 1) = 0$

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) = -2p$$

В силу утверждения 2 последнее уравнение имеет не более одного корня, т.к. в его левой части – возрастающая функция, а в правой – постоянная функция.

Изобразим решение уравнения графически. Для этого построим схематически на отрезке $[1; 3]$ графики функций, которые находятся в левой и правой частях уравнения (рис.26). При этом заметим, что:

$$y(1) = 4\sqrt[3]{3,5 \cdot 1 - 2,5} + 3\log_2(3 \cdot 1 - 1) = 7,$$

$$y(3) = 4\sqrt[3]{3,5 \cdot 3 - 2,5} + 3\log_2(3 \cdot 3 - 1) = 17.$$

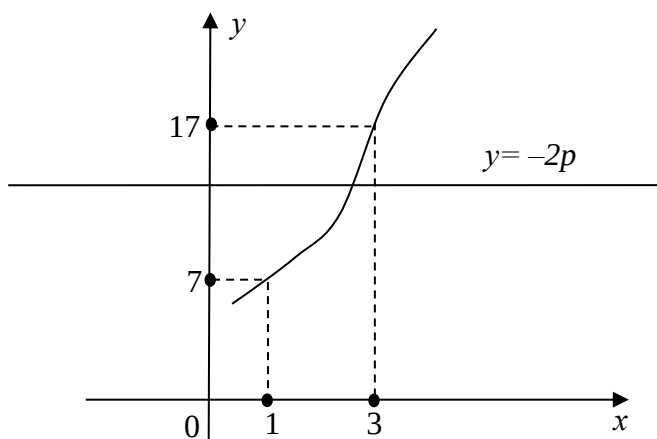


Рис. 26

Чтобы решение уравнения $4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) = -2p$ принадлежало отрезку $[1; 3]$, необходимо $7 \leq -2p \leq 17$, откуда по свойству числовых неравенств имеем $-8,5 \leq p \leq -3,5$.

Ответ: $[-8,5; -3,5]$.

Задание 2.

При каких значениях параметра p , уравнение $4^{-|z-p|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(3 - 2z + z^2) + 2^{-(z^2-2z)} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2 + 2|z - p|) = 0$ имеет три корня?

Решение.

Выполним преобразования, сосредоточив выражения с параметром p в правой части уравнения, а без параметра – в левой его части, получим:

$$2^{-2|z-p|} \cdot 2 \log_3(z^2 - 2z + 3) = 2^{-z^2+2z} \cdot \log_3(2|z-p| + 2)$$

$$\frac{1}{2^{2|z-p|-1}} \cdot \log_3(z^2 - 2z + 3) = \frac{1}{2^{z^2-2z}} \cdot \log_3(2|z-p| + 2)$$

$$2^{z^2-2z} \cdot \log_3(z^2 - 2z + 3) = 2^{2|z-p|-1} \cdot \log_3(2|z-p| + 2)$$

Умножим обе части последнего уравнения на 2^3 :

$$2^{z^2-2z+3} \cdot \log_3(z^2 - 2z + 3) = 2^{2|z-p|+2} \cdot \log_3(2|z-p| + 2)$$

В обеих частях уравнения – возрастающие и непрерывные функции от аргумента t (по свойствам возрастающих и непрерывных функций) и от аргумента u (по свойствам возрастающих и непрерывных функций): $y = 2^t \cdot \log_3 t$, где $t = z^2 - 2z + 3$ и $y = 2^u \cdot \log_3 u$, где $u = 2|z-p| + 2$.

Из сказанного по выше приведенной теореме замечаем, что исходное уравнение свелось к уравнению:

$$z^2 - 2z + 3 = 2|z-p| + 2$$

$$(z-1)^2 = 2|z-p|$$

Сформулируем новую задачу: найти значения параметра p , при которых уравнение $(z-1)^2 = 2|z-p|$ имеет три решения.

Решим задачу графически.

$y = (z-1)^2$ – графиком является парабола.

$y = 2|z-p|$ – «уголок», сдвинутый на p единиц по оси oz влево или вправо в зависимости от p .

Итого получим три случая (рис. 27, рис. 28, рис. 29).

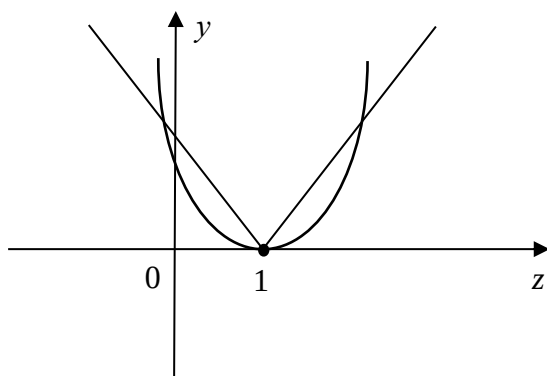


Рис. 27

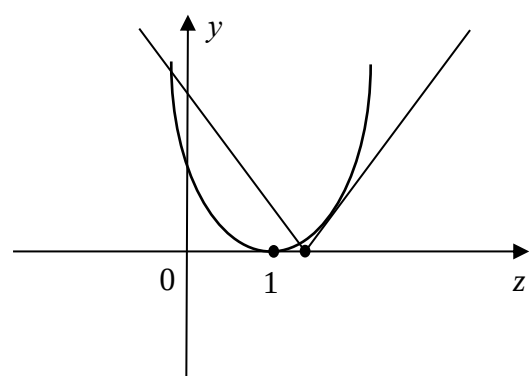


Рис. 28

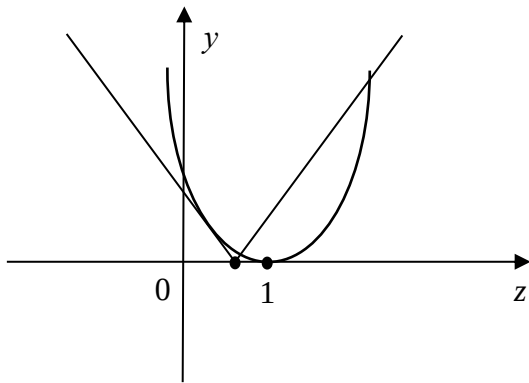


Рис. 29

1) $p = 1$ (рис. 27) – уравнение имеет три корня.

2) $p > 1$ (рис. 28) – правый луч «уголка» касается параболы, тогда

уравнение имеет три корня при $p = 1\frac{1}{2}$:

$y = 2(z - p)$ – касательная к графику функции $y = z^2 - 2z + 1$,

$y' = 2z - 2$, $y'(z_0) = 2z_0 - 2$, $2z_0 - 2 = 2$, $z_0 = 2$, $y_0 = 1$,

$y_0 = 2z_0 - 2p$,

$p = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Значение $p = 1\frac{1}{2}$ можно найти, не используя производную. Для этого надо решить задачу: Найти те значения p , при которых уравнение $z^2 - 2z + 1 = 2z - 2p$ имеет единственный корень. Эта задача решается при условии: $D = 0$; $16 - 8p - 4 = 0$; $p = 1\frac{1}{2}$.

3) $p < 1$ (рис. 29) – левый луч «уголка» касается параболы, тогда уравнение имеет три корня при $p = \frac{1}{2}$:

$y = -2(z - p)$ – касательная к графику функции $y = z^2 - 2z + 1$,

$y' = 2z - 2$, $y'(z_0) = 2z_0 - 2$, $2z_0 - 2 = -2$, $z_0 = 0$, $y_0 = 1$,

$y_0 = -2z_0 + 2p$,

$p = \frac{1}{2}$.

Найти p можно также составив соответствующее квадратное уравнение и потребовав условие $D = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Задание 3.

Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $p^z + 1 - p^2 = \log_p \frac{1}{z}$ имеет решение и любой корень находится в промежутке $[1; 2]$.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду $p^z - \log_p \frac{1}{z} = p^2 - 1$.

Выполним определенные равносильные преобразования, получим $p^z + \log_p z = p^2 - 1$.

Введем две функции $y = p^z + \log_p z$ и $y = p^2 - 1$ ($p^2 - 1 = \text{const}$).

В виду того, что p в первой функции является основанием показательной и логарифмической функции, рассмотрим случаи, когда $p > 1$ и $0 < p < 1$.

1 случай относительно p ($p > 1$).

Так как $p > 1$, то $y = p^z$ возрастает по свойству показательной функции, $y = \log_p z$ возрастает по свойству логарифмической функции, то функция $y = p^z + \log_p z$ возрастает как сумма возрастающих функций и непрерывна как сумма непрерывных функций на области определения.

Следовательно, уравнение $p^z + \log_p z = p^2 - 1$ по известному утверждению имеет не более одного корня (если в одной из частей уравнения $f(z) = p$ находится непрерывная и монотонная функция, а в другой его части – постоянная, то уравнение имеет не более одного корня). По требованию задачи нам надо, чтобы уравнение имело 1 корень из промежутка $[1; 2]$. Обратимся к рисунку 30.

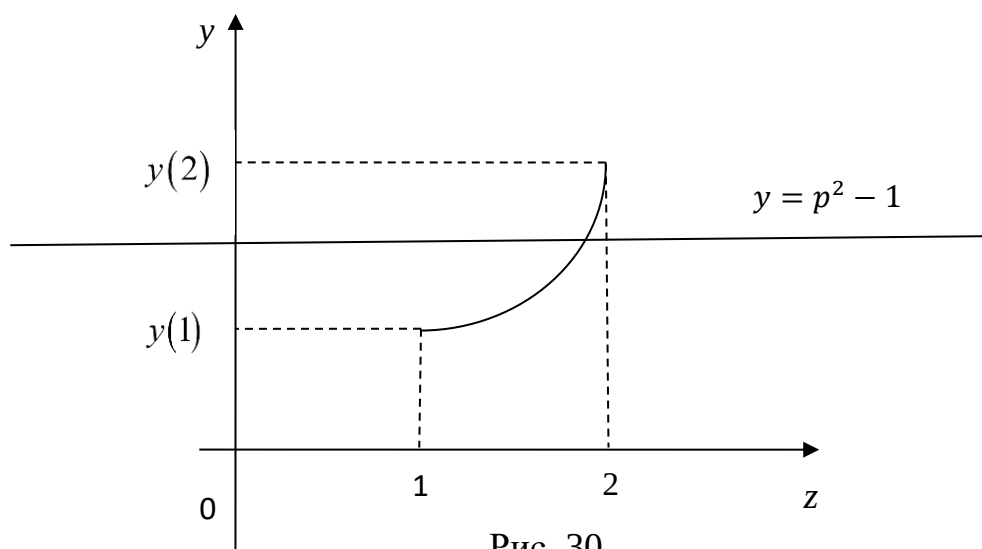


Рис. 30

Для того чтобы полученное уравнение имело 1 корень необходимо и достаточно, чтобы $f(1) \leq p^2 - 1 \leq f(2)$.

Найдем $f(1)$ и $f(2)$: $f(1) = p$ $f(2) = p^2 + \log_p 2$. Тогда

$$\begin{cases} p^2 - 1 \geq p, \\ p^2 - 1 \leq p^2 + \log_p 2. \end{cases} \text{ Решая систему при } p > 1, \text{ получим } p \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2 случай относительно p ($0 < p < 1$).

$y = p^z + \log_p z$ – убывает и непрерывна на области определения как сумма убывающих и непрерывных функций; $y = p^2 - 1$ – постоянная функция. Следовательно, уравнение $p^z + \log_p z = p^2 - 1$ имеет не более одного корня. По требованию задачи нам надо, чтобы уравнение имело один корень из промежутка $[1; 2]$. Обратимся к рисунку 31.

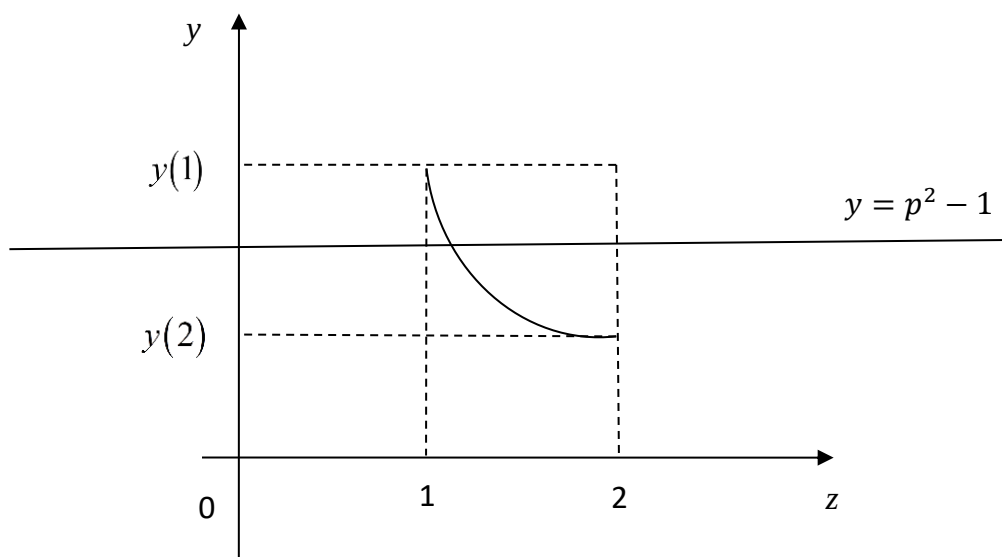


Рис. 31

Для того чтобы уравнение имело 1 корень необходимо и достаточно, чтобы $y(2) \leq p^2 - 1 \leq y(1)$. Тогда:

$$\begin{cases} p^2 - 1 \leq p, \\ p^2 - 1 \geq p^2 + \log_p 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 - p - 1 \leq 0, \\ \log_p 2 \leq -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq p \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ \log_p 2 \leq \log_p \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Т.к. $0 < p < 1$, из последнего неравенства получаем $\frac{1}{2} < p < 1$:

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq p \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ \frac{1}{2} \leq p < 1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq p < 1.$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1}{2}; 1 \right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty \right).$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. При $p > 1$ решите уравнение $\log_p(2z^2 - 4z + 2 + p^{z^2-2z+5}) = 4$.

Задание 2. Найдите значения p , при которых уравнение $\sqrt{3z-5} = p - \sqrt{3z+1}$ имеет единственное решение.

Задание 3. При каком наименьшем значении p функция $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + px$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответы для самоконтроля:

1) 1.

2) $[4; +\infty)$.

3) 1.

§2. Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, с применением свойства неотрицательности функций

Теоретическая справка

Утверждение 1. Пусть левая часть уравнения $F(x) = 0$ (1) есть сумма нескольких функций $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ (2), каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

В частности, к таким уравнениям относятся, например, уравнения вида:

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) = 0;$$
$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = 0.$$

Для решения неравенств, содержащих сумму неотрицательных функций справедливо нижеследующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть левая часть неравенства $F(x) \leq 0$ (4) есть сумма нескольких неотрицательных функций (2), каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения, тогда неравенство (4) равносильно системе уравнений (3).

В частности, к таким неравенствам относятся, например, неравенства вида

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_n^2(x) \leq 0; |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq 0.$$

Приведем ООД, которая в лаконичном виде указывает на ход рассуждений при решении уравнений и неравенств с использованием неотрицательности входящих в них функций:

$$1) \begin{cases} f(x) + g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in D(f) \cap D(g)$$

$$2) \begin{cases} f(x) + g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f) \cap D(g), \\ x \neq x_k, \end{cases}$$

где k_x – решения системы $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

$$3) \begin{cases} f(x) + g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Для самостоятельной проверки знаний по теме выполните тест с последующим самоконтролем.

Тест по теме

«Неотрицательность функций при решении уравнений и неравенств»

- 1) Решением неравенства $(y + 2)^2 + (6 + 3y)^2 \leq 0$ является: ...
- 2) Корнем уравнения $|v^2 - 5v + 6|^2 + 3|v - 3| = 0$ является число ...
- 3) Решением неравенства $\log_2^2 x \geq 0$ является промежуток ...
- 4) Множество, являющееся решением неравенства $\sqrt{2u + 8} + |u + 4| > 0$,
...
- 5) Решение неравенства $\sin^2 z + \cos^2 z \geq 0$...

Самоконтроль выполнения тестовых заданий

1	2	3	4	5
$\emptyset$	3	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$	любое действительное число

Практические задания

Задание 1.

При каких значениях параметра p уравнение

$$\left| \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} \right| + z^2 - 2z + 1 = 0 \text{ имеет хотя бы одно решение?}$$

Решение.

$$\left| \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} \right| + z^2 - 2z + 1 = 0,$$

$$\left| \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} \right| + (z - 1)^2 = 0,$$

$$\left| \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} \right| \geq 0 \text{ и } (z - 1)^2 \geq 0, \text{ тогда по утверждению 1 исходное}$$

уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left| \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} \right| = 0, \\ (z - 1)^2 = 0; \\ \frac{z^2 - 4pz + 4p^2 - 1}{z - 2p} = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы с учетом того, что $z = 1$.

$$4p^2 - 4p = 0,$$

$$p(p - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} p = 0, \\ p = 1. \end{cases}$$

Ответ: 0; 1.

Задание 2.

При каких значениях параметра p уравнение

$$p^2 z^2 + 2p(\sqrt{2} - 1)z + \sqrt{z - 2} = 2\sqrt{2} - 3 \text{ имеет хотя бы одно решение?}$$

Решение.

$$p^2 z^2 + 2p(\sqrt{2} - 1)z + \sqrt{z - 2} = 2\sqrt{2} - 3,$$

$$p^2 z^2 + 2p(\sqrt{2} - 1)z + 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{z - 2} = 0.$$

$$\text{Выделяя квадрат, имеем } (pz + (\sqrt{2} - 1))^2 + \sqrt{z - 2} = 0.$$

Т.к. $(pz + (\sqrt{2} - 1))^2 \geq 0$ и $\sqrt{z - 2} \geq 0$, то, опираясь на известное утверждение, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (pz + (\sqrt{2} - 1))^2 = 0, \\ \sqrt{z - 2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} pz + (\sqrt{2} - 1) = 0, \\ z - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \\ z = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

Замечание. Предложенное задание 2 можно выполнить другим способом – графическим. Для этого перепишем уравнение в виде $p^2 z^2 + 2p(\sqrt{2} - 1)z + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{z - 2}$.

Заметим, что $p \neq 0$, а потому графиком функции $y = p^2 z^2 + 2p(\sqrt{2} - 1)z + 3 - 2\sqrt{2}$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Графиком функции $y = -\sqrt{z - 2}$ является ветвь параболы, проходящая через точку $(2; 0)$. Обратимся к рис. 32.

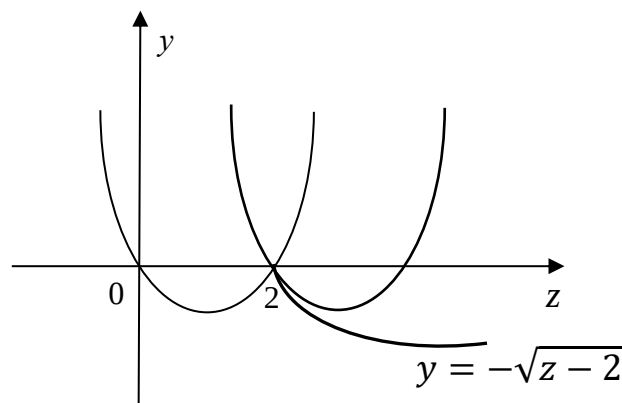


Рис. 32

Чтобы уравнение имело хотя бы одно решение, точка $(2; 0)$ должна принадлежать параболе, следовательно, имеем верное равенство:

$$4p^2 + 4p(\sqrt{2} - 1) + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

$$(2p + (\sqrt{2} - 1))^2 = 0, \quad p = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Задание 3.

При каких значениях параметров p и q уравнение $(3z - p^2 + pq - q^2)^2 + (2z^2 - p^2 - pq)^2 + z^2 + 9 = 6z$ имеет хотя бы одно решение?

Решение.

$$(3z - p^2 + pq - q^2)^2 + (2z^2 - p^2 - pq)^2 + z^2 + 9 = 6z,$$

$$(3z - p^2 + pq - q^2)^2 + (2z^2 - p^2 - pq)^2 + (z - 3)^2 = 0.$$

Так как $(3z - p^2 + pq - q^2)^2 \geq 0$, $(2z^2 - p^2 - pq)^2 \geq 0$ и $(z - 3)^2 \geq 0$,

то по утверждению 1 исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (3z - p^2 + pq - q^2)^2 = 0, \\ (2z^2 - p^2 - pq)^2 = 0, \\ (z - 3)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z - p^2 + pq - q^2 = 0, \\ 2z^2 - p^2 - pq = 0, \\ z - 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - p^2 + pq - q^2 = 0, \\ 18 - p^2 - pq = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения системы на 2 и вычтем из полученного уравнения второе уравнение системы.

Получим уравнение $-p^2 + 3pq - 2q^2 = 0$, $p^2 - 3pq + 2q^2 = 0$, откуда $(p - q)(p - 2q) = 0$, т.е. $\begin{cases} p = q, \\ p = 2q. \end{cases}$

Если $p = q$, то $9 - p^2 + p^2 - p^2 = 0$ и $p = \pm 3, q = \pm 3$.

Если $p = 2q$, то $9 - 4q^2 + 2q^2 - q^2 = 0$, тогда $q = \pm\sqrt{3}, p = \pm 2\sqrt{3}$.

Ответ: $(3; 3), (-3; -3), (2\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$.

§3. Метод мажорант (метод ограниченности) для решения уравнений и неравенств с параметрами

Теоретическая справка

Мажорантой данной функции $f(x)$ на множестве P называется такое число M , что либо $f(x) \leq M$, либо $f(x) \geq M$ для любых x из множества P .

Существует много мажорант для некоторых известных функций, например:

а) $y = \cos x$

Так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, то мажорантой является любое число, не больше -1 и не меньше 1 . Например, мажорантами для функции $y = \cos x$ являются числа -2 ; 2 .

б) $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c – числа, $a \neq 0$)

Мажорантой может служить ордината вершины параболы.

Основная идея метода мажорант состоит в следующем: пусть имеется уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M , что для любых x из множества $D(f) \cap D(g)$ имеем $f(x) \leq M$, а $g(x) \geq M$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно

системе
$$\begin{cases} f(x) = M, \\ g(x) = M. \end{cases}$$

Найти мажоранту можно:

- 1) с помощью производных функций, входящих в уравнение;
- 2) элементарными средствами:

– используя неравенства

а) $b + \frac{1}{b} \geq 2$ при $b > 0$ равенство $b = 1$;

б) $b + \frac{1}{b} \leq -2$ при $b < 0$ равенство достигается при $b = -1$;

в) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a > 0, b > 0$ равенство достигается при $a = b$.

г) $a \sin z + b \cos z \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

– применяя свойства числовых неравенств.

Практические задания

Задание 1.

При каких значениях параметра p уравнение $(p^2 - 6p + 9)(2 + 2 \sin z - \cos^2 z) + (12p - 18 - 2p^2)(1 + 2 \sin z) + p + 3 = 0$ не имеет решения?

Решение.

Преобразуем исходное уравнение, выполнив необходимые преобразования:

$$(p^2 - 6p + 9)(2 + 2 \sin z - \cos^2 z) + (12p - 18 - 2p^2)(1 + 2 \sin z) + p + 3 = 0$$

$$(p^2 - 6p + 9)(-\cos^2 z) + p + 3 = 0$$

$$(p^2 - 6p + 9)(1 - \sin^2 z) + p + 3 = 0$$

$$-p^2 + 6p - 9 + p + 3 + (p^2 - 6p + 9)\sin^2 z = 0$$

$$(p^2 - 6p + 9)\sin^2 z = p^2 - 7p + 6$$

Можно уравнение также представить в виде:

$$(p^2 - 6p + 9)\cos^2 z = p + 3.$$

Если $p^2 - 6p + 9 = 0$, т.е. $p = 3$, то уравнение $0 \cdot \sin^2 z = -6$ не имеет решений.

$$\text{Если } p^2 - 6p + 9 \neq 0, \text{ то } \sin^2 z = \frac{p^2 - 7p + 6}{p^2 - 6p + 9}.$$

Заметим, что полученное уравнение может иметь решения в том случае, когда $0 \leq \sin^2 z \leq 1$. Найдем те p , при которых $0 \leq \frac{p^2 - 7p + 6}{p^2 - 6p + 9} \leq 1$:

$$\begin{cases} p^2 - 7p + 6 \leq p^2 - 6p + 9, \\ p^2 - 7p + 6 \geq 0, \\ p^2 - 6p + 9 \neq 0; \end{cases}$$

$$p \in [-3; 1] \cup [6; +\infty).$$

Значит, уравнение не имеет решений при $p \in (-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 6)$.

Задание 2.

Найдите все значения параметра p , удовлетворяющие условию $2 < p < 5$, при которых уравнение $\log_2(3 - |\sin pz|) = \cos\left(\pi z - \frac{\pi}{6}\right)$ относительно z имеет

хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $2 \leq z \leq 3$.

Решение.

Оценим правую и левую части уравнения:

Левая часть: $\log_2(3 - |\sin pz|)$

$$0 \leq |\sin pz| \leq 1,$$

$$-1 \leq -|\sin pz| \leq 0,$$

$$2 \leq 3 - |\sin pz| \leq 3.$$

Прологарифмировав все части неравенства по основанию 2, получим

$$\log_2(3 - |\sin pz|) \geq 1 \quad (1)$$

Правая часть: $\cos\left(\pi z - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(\pi z - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad (2)$$

Опираясь на метод мажорант, делаем вывод о том, что равенство левой и правой частей уравнения возможно в том и только том случае, когда:

$$\begin{cases} \log_2(3 - |\sin pz|) = 1, \\ \cos\left(\pi z - \frac{\pi}{6}\right) = 1; \\ \begin{cases} pz = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z, \\ z = \frac{1}{6} + 2n, n \in Z. \end{cases} \end{cases}$$

По условию $2 \leq z \leq 3$, следовательно, из того, что $z = \frac{1}{6} + 2n, n \in Z$ получим $z = \frac{13}{6}$.

Подставим найденное значение z в первое равенство системы:

$$pz = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z: p = \frac{3}{13}\pi + \frac{6\pi l}{13}, l \in Z.$$

По условию $2 < p < 5$, следовательно, применяя метод перебора, будем иметь:

$$l = 1, p = \frac{9\pi}{13}; 2 < \frac{9\pi}{13} < 5,$$

$$l = 2, p = \frac{15\pi}{13} < 5; 2 < \frac{15\pi}{13} < 5,$$

$$l = 2, p = \frac{21\pi}{13} > 5.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13}$.

Задание 3.

При каких целых значениях параметра p выполняется равенство $\sin \beta = \frac{b^2-2b+1}{b^2-1}, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

Решение.

По условию $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$, следовательно, $0 < \sin \beta < \frac{1}{2}$, т.к. $\sin \beta$ на указанном промежутке возрастает. Для того чтобы выполнялось равенство, данное в условии задания, необходимо, решить следующее неравенство:

$$0 < \frac{b^2-2b+1}{b^2-1} < \frac{1}{2}.$$

Решим полученное неравенство:

$$\begin{cases} \frac{b^2-2b+1}{b^2-1} < \frac{1}{2}, \\ \frac{b^2-2b+1}{b^2-1} > 0. \end{cases}$$

Выполнив определенные преобразования, получим:

$$\begin{cases} b^2 - 4b + 3 < 0, \\ b^2 - 2b + 1 > 0, \\ b^2 - 1 > 0; \end{cases}$$
$$1 < b < 3.$$

В виду того, что b – целое число, то решением последнего неравенства является число 2.

Ответ: 2.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 az + 1 + \cos z = 0$ имеет решения? Найдите эти решения.

Ответ: при $a = \frac{n}{1+2l}, z = \pi(1 + 2l), l \in Z$.

Задание 2.

Найдите значения параметра p , при которых уравнение

$5^{\frac{z}{3}} + 5^{\frac{z}{6}+1} + 2p = 9 - 5^{-\frac{z}{3}} - 5^{1-\frac{z}{6}}$ имеет решение.

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Задание 3.

При каком действительном b уравнение $4^z + 2^{z+2} + 7 = b - 4^{-z} - 2 \cdot 2^{1-z}$ имеет решение?

Ответ: 17.

Задание 4.

При каких целых значениях p уравнение $5 - 4 \sin^2 z - 8 \cos^2 \frac{z}{2} = 2p$ имеет решение?

Ответ: $-2; -1; 0; 1; 2$.

Задание 5.

При каких значениях параметра p уравнение $(z^2 - 6|z| - p)^2 + 12(z^2 - 6|z| - p) + 37 = \cos \frac{18\pi}{p}$ имеет ровно два корня?

Ответ: $-3; 9$.

Задание 6.

При каких значениях параметра p уравнение $\sin^6 z + \cos^6 z = p$ имеет корни?

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Задание 7.

При каких значениях параметра p уравнения $\sin z = p - 2$ и $\sqrt{1+x} = 1 - 2p$ равносильны?

Ответ: $(0,5; 1) \cup (3; +\infty)$.

Задание 8.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2a \sin z - 2a < a^2 - 4$ выполняется для любых z .

Ответ: $(-\infty; -2(1 + \sqrt{2})) \cup (2; +\infty)$.

Задание 9.

Найдите все значения параметра p , при которых функция $g(z) = \sin 2z - 8(p + 1) \sin z + (4p^2 + 8p - 14)z$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответ: $(-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Самоконтроль. Решения заданий для самостоятельной работы

Решение задания 1.

Перепишем данное уравнение в виде $\sin^2 az = -\cos z - 1$.

Оценим левую и правую части уравнения:

$$0 \leq \sin^2 az \leq 1, \quad -\cos z - 1 \leq 0.$$

Опираясь на метод мажорант, делаем вывод о том, что исходное уравнение имеет решения в том и только том случае, когда:

$$\begin{cases} \sin^2 az = 0, \\ 1 + \cos z = 0; \\ az = \pi n, n \in Z, \\ z = \pi + 2\pi l, l \in Z. \end{cases}$$

При $a \neq 0$: $\begin{cases} z = \frac{\pi n}{a}, n \in Z, \\ z = \pi + 2\pi l, l \in Z, \end{cases}$

$$\pi + 2\pi l = \frac{\pi n}{a},$$

$$a = \frac{n}{1+2l}, n, l \in Z, n \neq 0 \text{ (т.к. } a \neq 0),$$

$$z = \pi(1 + 2l), l \in Z.$$

При $a = 0$ надо решить уравнение вида $1 + \cos z = 0, z = \pi + 2\pi l, l \in Z$.

Ответ: при $a = \frac{n}{1+2l}, z = \pi(1 + 2l), l \in Z$.

Решение задания 2.

$$5^{\frac{z}{3}} + 5^{\frac{z}{6}+1} + 2p = 9 - 5^{-\frac{z}{3}} - 5^{1-\frac{z}{6}}.$$

Перенесем выражения с переменной z в левую сторону, а выражение, содержащее p – в правую часть уравнения. Получим:

$$5^{\frac{z}{3}} + 5^{-\frac{z}{3}} + 5(5^{\frac{z}{6}} + 5^{-\frac{z}{6}}) = 9 - 2p$$

Применим неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$) к выражениям, стоящим в

левой части уравнения:

$$5^{\frac{z}{3}} + 5^{-\frac{z}{3}} \geq 2,$$
$$5^{\frac{z}{6}} + 5^{-\frac{z}{6}} \geq 2.$$

С учетом полученных неравенств получим $9 - 2p = 12$, откуда $p = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Решение задания 3.

$$4^z + 2^{z+2} + 7 = b - 4^{-z} - 2 \cdot 2^{1-z},$$
$$4^z + 4^{-z} + 4 \cdot 2^z + 4 \cdot 2^{-z} = b - 7,$$
$$4^z + 4^{-z} + 4(2^z + 2^{-z}) = b - 7.$$

Т.к. $4^z + 4^{-z} \geq 2$ и $2^z + 2^{-z} \geq 2$, то $b - 7 = 10$ откуда $b = 17$.

Ответ: 17.

Решение задания 4.

Найдем множество значений функции $g = 5 - 4 \sin^2 z - 8 \cos^2 \frac{z}{2}$.

Для этого преобразуем выражение, которым задана функция, и приведем его к выражению относительно одной функции $\cos z$:

$$5 - 4 \sin^2 z - 8 \cos^2 \frac{z}{2} = 5 - 4 \sin^2 z - 4(1 + \cos z) =$$
$$= 5 - 4(1 - \cos^2 z) - 4 - 4 \cos z = 5 - 4 + 4 \cos^2 z - 4 - 4 \cos z =$$
$$= 4 \cos^2 z - 4 \cos z - 3.$$

Найдем множество значений функции $h = 4 \cos^2 z - 4 \cos z - 3$.

Пусть $\cos z = t$, где $t \in [-1; 1]$, тогда $h = 4t^2 - 4t - 3$.

$$h' = 8t - 4,$$

$$h'(t) = 0 \text{ при } t = \frac{1}{2}.$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -4, h(-1) = 5, h(1) = -3.$$

Выбираем $h_{\text{наибол}} = 5, h_{\text{наим}} = -4$. Следовательно, $-4 \leq h \leq 5$.

Множество значений функции $h = 4t^2 - 4t - 3, t \in [-1; 1]$.

Можно найти по-другому: $t_0 = \frac{1}{2}, h_0 = -4, h(-1) = 5, h(1) = -3$.

Выбираем наименьшее значение: -4 и наибольшее: 5 .

Исходное уравнение будет иметь решения, когда

$$-4 \leq 2p \leq 5; -2 \leq p \leq \frac{5}{2}.$$

Целые значения p из найденного промежутка: $-2; -1; 0; 1; 2$.

Ответ: $-2; -1; 0; 1; 2$.

Решение задания 5.

$$(z^2 - 6|z| - p)^2 + 12(z^2 - 6|z| - p) + 37 = \cos \frac{18\pi}{p},$$

$$(z^2 - 6|z| - p)^2 + 36 + 12(z^2 - 6|z| - p) + 37 = \cos \frac{18\pi}{p} - 1.$$

Выделим квадрат в левой части данного уравнения:

$$(z^2 - 6|z| - p + 6)^2 = \cos \frac{18\pi}{p} - 1.$$

Так как $(z^2 - 6|z| - p + 6)^2 \geq 0$ и $\cos \frac{18\pi}{p} - 1 \leq 0$, то исходное уравнение равносильно системе (используется метод мажорант):

$$\begin{cases} (z^2 - 6|z| - p + 6)^2 = 0, \\ \cos \frac{18\pi}{p} = 1. \end{cases}$$

Пусть $t = |z|, t \geq 0$ тогда первое уравнение системы будет иметь вид $t^2 - 6t - p + 6 = 0$.

Система примет вид:

$$\begin{cases} p = \frac{9}{l}, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0, \\ t^2 - 6t - (p - 6) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $t = |x|$ и исходное уравнение должно иметь ровно два корня, то наша задача свелась к следующей *новой задаче*: найти такие p , при которых уравнение $t^2 - 6t - (p - 6) = 0$ имеет единственное неотрицательное решение.

Для того, чтобы полученное уравнение имело единственное положительное решение, необходимо рассмотреть 2 случая:

1) $D = 0$ и $t \geq 0$.

$$D_1 = 9 + p - 6 = 3 + p = 0,$$

$$p = -3.$$

Убедимся, что при $p = -3$ корень уравнения принимает положительные значения: $t = 3$.

Проверим, найдутся ли для $p = -3$ целые l :

$$-3 = \frac{9}{l}$$

$$l = -3 - \text{целое.}$$

Таким образом, $p = -3$.

2) При $D > 0$ уравнение имеет два корня, но только один должен быть неотрицательным. Это возможно, когда:

$$\begin{cases} 4p + 12 \geq 0, \\ -(p - 6) \leq 0; \\ p \geq 6. \end{cases}$$

Также проверим l – является ли оно целым при найденных значениях p .

$$p = \frac{9}{l},$$

$$\frac{9}{l} \geq 6, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0,$$

$$l = 1.$$

Таким образом, $p = 9$.

Ответ: $-3; 9$.

Решение задания 6.

$$\begin{aligned} & \text{Преобразуем левую часть уравнения: } \sin^6 z + \cos^6 z = \\ & = (\sin^2 z)^3 + (\cos^2 z)^3 = (\sin^2 z + \cos^2 z)(\sin^4 z - \sin^2 z \cos^2 z + \cos^4 z) = \\ & = 1 - 3 \sin^2 z \cos^2 z = 1 - \frac{3 \sin^2 2z}{4} = 1 - \frac{3(1 - \cos^2 2z)}{4} = \frac{4 - 3 + 3 \cos^2 2z}{4} = \\ & = \frac{1 + \frac{3 \cdot 2 \cos^2 2z}{2}}{4} = \frac{2 + 3(1 + \cos 4z)}{8} = \frac{5 + 3 \cos 4z}{8}. \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{5+3 \cos 4z}{8} = p$, т.е. $\cos 4z = \frac{8p-5}{3}$.

Так как $-1 \leq \cos 4z \leq 1$, то уравнение $\frac{5+3 \cos 4z}{8} = p$ имеет корни тогда и только тогда, когда $-1 \leq \frac{8p-5}{3} \leq 1$:

$$\begin{cases} \frac{8p-5}{3} \geq -1, \\ \frac{8p-5}{3} \leq 1; \\ \frac{1}{4} \leq p \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Решение задания 7.

Уравнения равносильны, если их решения совпадают или они оба не имеют корней. Рассмотрим отдельно каждое уравнение:

а) $\sin z = p - 2$.

$-1 \leq \sin z \leq 1$, поэтому данное уравнение будет иметь решения в том и только том случае, когда $-1 \leq p - 2 \leq 1$, следовательно, $1 \leq p \leq 3$.

б) $\sqrt{1+x} = 1 - 2p$.

Для того, чтобы данное уравнение имело решение необходимо и достаточно, чтобы $1 - 2p \geq 0$; $p \leq \frac{1}{2}$.

Анализируя а) и б), приходим к выводу, что таких p , чтобы оба уравнения имели одновременно корни нет.

Найдем такие p , при которых оба уравнения не имеют корни:

$$\begin{cases} \begin{cases} p - 2 > 1, \\ p - 2 < -1, \\ 1 - 2p < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} p > 3, \\ 0,5 < p < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(0,5; 1) \cup (3; +\infty)$.

Решение задания 8.

$$\cos^2 x + 2a \sin z - 2a < a^2 - 4,$$

$$\cos^2 x + 2a \sin z - 2a - a^2 + 4 < 0,$$

$$1 - \sin^2 x + 2a \sin z - 2a - a^2 + 4 < 0.$$

Пусть $\sin z = u$, $-1 \leq u \leq 1$, тогда $u^2 - 2au + a^2 + 2a - 5 > 0$.

Решение данного задания в новых условиях свелось к решению *новой*

задачи: найти все значения a , при которых неравенство $u^2 - 2au + a^2 + 2a - 5 > 0$ выполняется для всех $-1 \leq u \leq 1$.

Графическая интерпретация решения неравенства представлена на рисунках 33, 34, 35:

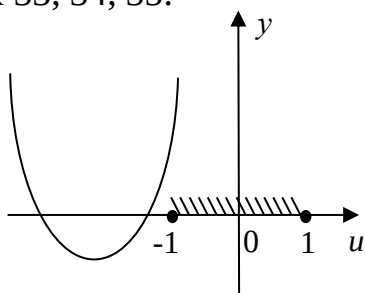


Рис. 33

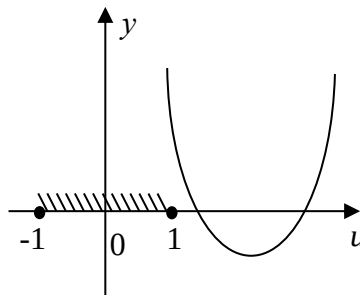


Рис. 34

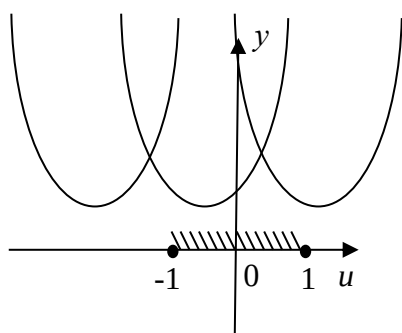


Рис. 35

Математической моделью рисунков является следующая система:

$$\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(1) > 0; \\ \begin{cases} a^2 + 4a - 4 > 0, \\ a^2 - 4 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} a > -2 + 2\sqrt{2}, \\ a < -2 - 2\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} a > 2, \\ a < -2; \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} a < -2(1 + \sqrt{2}), \\ a > 2. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2(1 + \sqrt{2})) \cup (2; +\infty)$.

Решение задания 9.

Найдем $g'(z)$ и узнаем, при каких a неравенство $g'(z) > 0$ выполняется при любых z .

$$g'(z) = 4 \cos^2 z - 8(p+1) \cos z + 4p^2 + 8p - 16$$

$$4 \cos^2 z - 8(p+1) \cos z + 4p^2 + 8p - 16 > 0 \text{ при любых } z$$

$$\cos^2 z - 2(p+1) \cos z + p^2 + 2p - 4 > 0 \text{ при любых } z$$

Пусть $\cos z = m$, $-1 \leq m \leq 1$.

Исходное задание можно переформулировать в виде *новой задачи*: найти все значения p , при которых неравенство $m^2 - 2(p+1)m + p^2 + 2p - 4 > 0$ верно для всех $-1 \leq m \leq 1$.

$$m^2 - 2(p+1)m + p^2 + 2p - 4 = 0$$

$$m_1 = p - \sqrt{5} + 1,$$

$$m_2 = p + \sqrt{5} + 1.$$

Чтобы условие задачи выполнялось, необходимо чтобы $m_1 > 1$ (рис. 36) или $m_2 < -1$ (рис. 37).

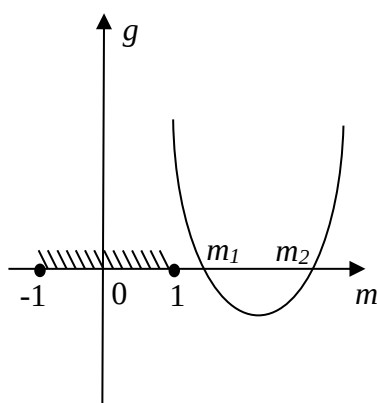


Рис. 36

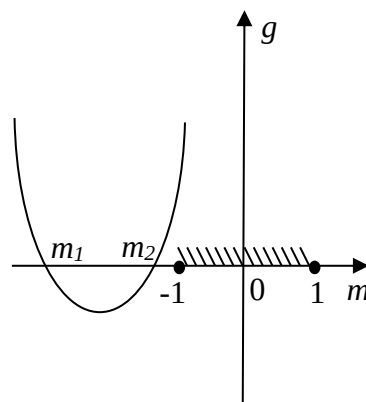


Рис. 37

Тогда $\begin{cases} p - \sqrt{5} + 1 > 1, \\ p + \sqrt{5} + 1 < -1; \end{cases} \begin{cases} p > \sqrt{5}, \\ p < -2 - \sqrt{5}. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

§4. Оценка множества значений функций для решения уравнений и неравенств с параметрами

Теоретические сведения

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на M и в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение, тогда имеют место следующие свойства:

1) Пусть c – константа

а) если $c > 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = cf(x)$ принимает наибольшее значение;

б) если $c < 0$, то в точке $x = x_0$ функция $y = cf(x)$ принимает наименьшее значение;

в) функция $y = f(x) + c$ в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение.

2) Если $f(x) > 0$ на множестве M , то в точке $x = x_0$ функция $y = \frac{1}{f(x)}$ принимает наименьшее значение на множестве M .

3) Если $f(x) < 0$ на множестве M , то в точке $x = x_0$ функция $y = \frac{1}{f(x)}$ принимает наименьшее значение на множестве M .

4) Пусть $g(x)$ на M определена, непрерывна и в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение, то функция $y = af(x) + bg(x)$, $a > 0$, $b > 0$ в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение.

5) Если $f(x) \geq 0$ на множестве M , $n \in N$, $a > 1$, то функции $f^n(x)$, $\sqrt[n]{f(x)}$, $a^{f(x)}$, $\log_a(1 + f(x))$ в точке $x = x_0$ принимают наибольшее значение.

6) Пусть дана сложная функция $f(g(x))$. Если $y = g(x)$ в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение и $y = f$ возрастает, то сложная функция $f(g(x))$ в точке $x = x_0$ принимает наибольшее значение. Если же функция f убывает, то сложная функция $f(g(x))$ в точке $x = x_0$ принимает наименьшее значение. Аналогичные свойства можно сформулировать, если $g(x)$ в точке $x = x_0$ принимает наименьшее значение.

Для освоения школьниками способа решения уравнений и неравенств с использованием множества значений функции целесообразно использовать следующее обобщение теоретического материала:

Утверждение 1. Пусть имеется уравнение вида $f(x) = g(x)$,

$E(f)$ – область значения функции $f(x)$,

$E(g)$ – область значения функции $g(x)$.

Если $E(f) \cap E(g) = B$ тогда $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = B, \\ g(x) = B. \end{cases}$

Утверждение 2. Пусть дано: а) $f(x) = g(x)$, б) $f(x) > g(x)$, в) $f(x) < g(x)$ и
 $E(f)$ – область значения функции $f(x)$,
 $E(g)$ – область значения функции $g(x)$.

Если наибольшее значение множества $E(f)$ меньше наименьшего значения множества $E(g)$, то:

- а) уравнение $f(x) = g(x)$ решений не имеет;
- б) неравенство $f(x) > g(x)$ решений не имеет;
- в) неравенство $f(x) < g(x)$ верно для любого значения x из области определения данного неравенства.

Часто при нахождении множества значений функции применяются свойства числовых неравенств, приведенные в таблице 3.

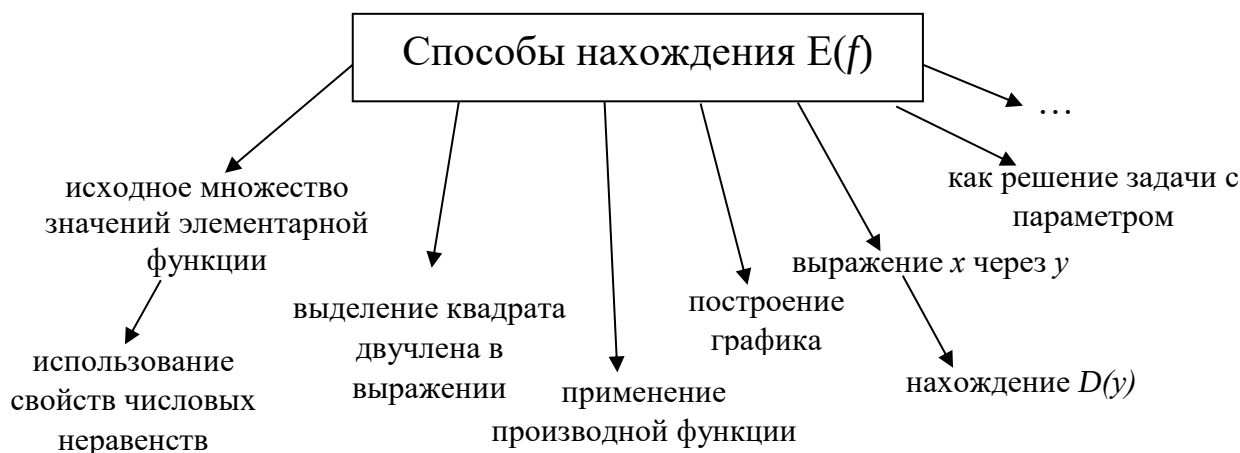
Таблица 3

№	Свойство	Словесная формулировка
1.	Если $a > b$, то $a + c > b + c$; или если $a < b$, то $a + c < b + c$	Можно прибавлять (вычитать) одно и то же число к обеим частям неравенства
2.	Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$	Неравенства одного смысла (с одинаковым знаком $>$ или $<$) можно почленно складывать
3.	Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$; или если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$	Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать одно из другого, и брать знак неравенства, являющегося уменьшаемым
4.	Если $a > b$ и $m > 0$, то $ma > mb$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$	Обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же положительное число; неравенство при этом сохраняет свой знак
5.	Если $a > b$ и $m < 0$, то $ma < mb$ и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$	Обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же отрицательное число; неравенство при этом меняет свой знак на противоположный
6.	Если $a > 0$ и $b > 0$ и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	Если обе части неравенства – положительные числа, то из неравенства $a > b$ следует неравенство противоположного смысла $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
7.	Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$ и $a > b$, то $a^n > b^n$, где $n \in N$	Если обе части неравенства – неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства

В ходе освоения умений находить множества значений функций учащиеся должны свободно оперировать знаниями множества значений таких элементарных функций:

- 1) $-1 \leq \sin x \leq 1, |\sin x| \leq 1$
- 2) $-1 \leq \cos x \leq 1, |\cos x| \leq 1$
- 3) $x^{2n} \geq 0$
- 4) $a^x > 0$
- 5) $|x| \geq 0$
- 6) $\sqrt{x} \geq 0$
- 7) $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$
- 8) $0 \leq \arccos x \leq \pi$
- 9) $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$
- 10) $0 < \text{arcctg} x < \pi$

Для формирования у школьников умений находить множество значений функции, в качестве ООД может выступать схема:



Для самостоятельной проверки знаний по теме выполните тест с последующим самоконтролем.

Тест по теме «Множество значений функций»

1. Наименьшее значение функции $g(z) = 3 \sin 2z - 5$ равно ...

- а) -5 б) -11 в) -2 г) -8

2. Функция $y(z) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ имеет наименьшее значение ...

3. $E(h)$ для функции $h(z) = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2z}{3}$ равно ...

- а) $[-2,5; -0,5]$ б) $[-2; -1]$ в) $[-3; -2]$ г) $[-2,5; 0,5]$

4. Множество значений функции $g(z) = \frac{1}{2} \text{tg}^2 z - 3$...

- а) $\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$ б) $[-3; +\infty)$ в) $(-\infty; +\infty)$ г) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$

5. $E(g)$ для функции $g(z) = \frac{1}{2} - 2^z$ равно ...
6. Укажите наименьшее число, принадлежащее множеству значений функции $h(z) = \frac{1}{3} \sin 7z - \frac{2}{3}$:
- а) 7 б) $\frac{1}{7}$ в) $-\frac{1}{7}$ г) -7
7. Множеством значений функции $g(z) = z^2 + 4z = 5$ является ...
8. Множество значений функции $g(x) = \sqrt{x} - 5$...
9. $E(h)$ для функции $h(z) = 4 - 3z^2$...
10. Множество значений функции $y(x) = 2 + x$...
11. Множеством значений функции $p(x) = 4 + \frac{1}{\cos^2 3x}$ является...

Самоконтроль выполнения тестовых заданий

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
г	$\frac{3}{4}$	в	б	$(-\infty; \frac{1}{2})$	в	$[1; +\infty)$	$[-5; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$[2; +\infty)$	$[5; +\infty)$

Практические задания

Задание 1.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $9 + 4 \sin u = a(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

I способ.

$$9 + 4 \sin u = a(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$$

$$9 + 4 \sin u = a \cdot \frac{1}{\sin^2 u}$$

$$\begin{cases} 9 \sin^2 u + 4 \sin^3 u = a, \\ \sin u \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $g(u) = 4 \sin^3 u + 9 \sin^2 u$, тогда уравнение системы имеет хотя бы один корень, когда $a \in E(g)$. Оценим множество значений функции $g(u) = 4 \sin^3 u + 9 \sin^2 u$ ($\sin u \neq 0$):

$$g(u) = \sin^2 u (4 \sin u + 9)$$

$$0 \leq \sin^2 u \leq 1, \text{ но т.к. } \sin u \neq 0, \text{ то } 0 < \sin^2 u \leq 1.$$

$$\text{Поскольку } -1 \leq \sin u \leq 1, \text{ то } 5 \leq 4 \sin u + 9 \leq 13.$$

Тогда $0 < 4 \sin^3 u + 9 \sin^2 u \leq 13$, откуда $a \in (0; 13]$.

II способ. Множество значений функции можно найти, используя производную функции $g(u) = 4 \sin^3 u + 9 \sin^2 u$ ($\sin u \neq 0$).

Пусть $\sin u = t$, $-1 \leq t \leq 1, t \neq 0$, тогда $g = 4t^3 + 9t^2, t \neq 0$.

$$g' = 12t^2 + 18t,$$

$$12t^2 + 18t = 0,$$

$$t = 0 \text{ или } t = -\frac{18}{12} - \text{не подходит, т.к. } -\frac{18}{12} < -1.$$

$$g(0) = 0,$$

$$g(-1) = 7,$$

$$g(1) = 13.$$

$$E(g) = (0; 13], \text{ следовательно, } a \in (0; 13].$$

Ответ: $(0; 13]$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

При каких значениях параметра p сумма $\log_p(\cos^2 z + 1)$ и $\log_p(\cos^2 z + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении z ?

Ответ: $[5; 12]$.

Задание 2.

При каких значениях параметра p уравнение $\sqrt[3]{\sin 2u \cdot \cos u + \cos 2u \cdot \sin u - 7} = p$ не имеет решения?

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (\sqrt[3]{-6}; +\infty)$.

Задание 3.

Найдите наименьшее целое значение параметра p , при котором уравнение $\frac{1}{3} \sqrt{36 \sin^2 z - 12 \sin z + 17} = p$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 2.

Задание 4.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $8 \sin^3 z = a + 9 \cos 2z$ не имеет корней.

Ответ: $(-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$.

Задание 5.

Найдите все значения параметра p , при которых сумма $\log_p \frac{3+2u^2}{1+u^2}$ и $\log_p \frac{5+4u^2}{1+u^2}$ не может быть больше 1 ни при каких значениях u .

Ответ: $p \in (0; 1) \cup (8; +\infty)$.

Задание 6.

Найдите все значения параметра p , при которых сумма $\log_p \frac{3+2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$ и $\log_p \frac{4+3\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$ ни при каких z не равна 1.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$.

Задание 7.

При каких значениях параметра a уравнение $\frac{2^u + 2^{-u}}{2^u - 2^{-u}} = a$ не имеет решения?

Ответ: $[-1; 1]$.

Задание 8.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\cos u \cdot e^{1-\cos 2u} = p$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}e^{\sqrt[3]{e}}; \frac{1}{2}e^{\sqrt[3]{e}}\right]$.

Самоконтроль. Решения заданий для самостоятельной работы**Решение задания 1.**

$$\log_p(\cos^2 z + 1) + \log_p(\cos^2 z + 5) = 1,$$

$$\log_p(\cos^2 z + 1) + \log_p(\cos^2 z + 5) = \log_p p,$$

$$\begin{cases} (\cos^2 z + 1) \cdot (\cos^2 z + 5) = p, \\ p > 0, p \neq 1. \end{cases}$$

Пусть $g = (\cos^2 z + 1) \cdot (\cos^2 z + 5)$, g – непрерывная функция. Оценим множество значений данной функции: $0 \leq \cos^2 z \leq 1$, следовательно,

$$1 \leq \cos^2 z + 1 \leq 2, \text{ откуда } 5 \leq \cos^2 z + 5 \leq 6.$$

Тогда $5 \leq (\cos^2 z + 1) \cdot (\cos^2 z + 5) \leq 12$, следовательно, $p \in [5; 12]$.

Ответ: $[5; 12]$.

Решение задания 2.

$$\text{Пусть } h = \sqrt[3]{\sin 2u \cdot \cos u + \cos 2u \cdot \sin u - 7}.$$

Выполнив тождественные преобразования, имеем $h = \sqrt[3]{\sin 3u - 7}$ – непрерывная функция. Оценим множество значений данной функции.

$$-1 \leq \sin 3u \leq 1,$$

$$-8 \leq \sin 3u - 7 \leq -6.$$

Функция вида $h = \sqrt[3]{t}$ возрастает на своей области определения, поэтому $E(h) = [-2; \sqrt[3]{-6}]$.

Следовательно, уравнение не имеет решения при $p \in (-\infty; -2) \cup (\sqrt[3]{-6}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (\sqrt[3]{-6}; +\infty)$.

Решение задания 3.

Пусть $g = \frac{1}{3}\sqrt{36 \sin^2 z - 12 \sin z + 17}$. Найдем множество значений данной функции.

$$y(z) = 36 \sin^2 z - 12 \sin z + 17.$$

Пусть $\sin z = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда $y(t) = 36t^2 - 12t + 17$, где $y(t)$ – непрерывная функция. Найдем ее множество значений:

$$t_{\text{в}} = \frac{1}{6}; y\left(\frac{1}{6}\right) = 16.$$

$$y(-1) = 65,$$

$$y(1) = 41.$$

$$E(y) = [16; 65], \text{ тогда } E(g) = \left[\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right], \text{ следовательно, } p \in \left[\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right],$$

поэтому наименьшее значение p равно 2.

Ответ: 2.

Решение задания 4.

$$8 \sin^3 z = a + 9 \cos 2z,$$

$$8 \sin^3 z - 9 \cos 2z = a,$$

$$8 \sin^3 z - 9(1 - 2\sin^2 z) = a,$$

$$8 \sin^3 z + 18 \sin^2 z - 9 = a,$$

$$\text{Пусть } h = 8 \sin^3 z + 18 \sin^2 z - 9.$$

$\sin z = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда $h = 8t^3 + 18t^2 - 9$, h – непрерывная

функция. Найдем $E(h)$ с помощью производной.

$$h' = 24t^2 + 36t;$$

$$24t^2 + 36t = 0,$$

$$4t(t + 9) = 0,$$

$t = 0$ или $t = -9$ – не удовлетворяет условию $-1 \leq t \leq 1$.

$$h(0) = -9,$$

$$h(-1) = 17,$$

$$h(1) = 17.$$

$E(h) = [-9; 17]$, тогда искомые значения параметра $p \in (-\infty; -9) \cup (17; +\infty)$.

Решение задания 5.

Найдем все такие p , при которых выполняется неравенство

$$\log_p \frac{3+2u^2}{1+u^2} + \log_p \frac{5+4u^2}{1+u^2} > 1.$$

$$\text{Приведем неравенство к виду } \log_p \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) + \log_p \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right) > 1,$$

выделив целые части в подлогарифмических выражениях.

Если $0 < p < 1$, то логарифмы в левой части неравенства будут отрицательными. Следовательно, сумма этих логарифмов не может быть больше 1, т.е. нет таких p , при которых неравенство имело бы решения. А, следовательно, при $0 < p < 1$ ни при каких значениях u сумма данных логарифмов не может быть больше 1.

Если $p > 1$, тогда:

$$\log_p \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) + \log_p \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right) > 1,$$

$$\log_p \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right) > 1,$$

$$\left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right) > p.$$

Оценим множество значений функции $g = \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right)$.

$$2 < 2 + \frac{1}{1+u^2} \leq 3 \text{ и } 4 < 4 + \frac{1}{1+u^2} \leq 5, \text{ тогда: } 8 < \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right) \leq 15,$$

следовательно, $E(g) = (8; 15]$, где $g = \left(2 + \frac{1}{1+u^2}\right) \left(4 + \frac{1}{1+u^2}\right)$.

Учитывая множество значений функции g делаем вывод о том, что решением последнего неравенства являются $p \in (1; 8]$. А потому сумма данных логарифмов с учетом рассматриваемого условия не может быть больше 1 ни при каких u при $p \in (8; +\infty)$

Ответ: $p \in (0; 1) \cup (8; +\infty)$.

Решение задания 6.

Составим уравнение $\log_p \frac{3+2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} + \log_p \frac{4+3\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} = 1$.

$$\log_p \left(2 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) + \log_p \left(3 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) = 1$$

1) Если $0 < p < 1$, то логарифмы в левой части уравнения будут отрицательны, следовательно, их сумма не равна 1.

2) Пусть $p > 1$.

Найдем значения p , при которых сумма логарифмов равна 1.

$$\left(2 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) \left(3 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) = p.$$

Оценим множество значений функции $h = \left(2 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) \left(3 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right)$.

$2 < 2 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \leq 3$ и $3 < 3 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \leq 4$, тогда $6 < \left(2 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) \left(3 + \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) \leq 12$.

Следовательно, $E(h) = (6; 12]$.

Поэтому, исходя из условия задачи, $p \in (0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 6] \cup (12; +\infty)$.

Решение задания 7.

$$\frac{2^u + 2^{-u}}{2^u - 2^{-u}} = a, u \neq 0.$$

Выполнив определенные преобразования, будем иметь: $\frac{2^{2u} + 1}{2^{2u} - 1} = a, u \neq 0$.

Получаем:

$$2^{2u} + 1 = a \cdot 2^{2u} - a,$$

$$2^{2u}(a - 1) = a + 1.$$

Если $a = 1$, то уравнение не имеет решений.

Если $a \neq 1$, то $2^{2u} = \frac{a+1}{a-1}$. Это уравнение не будет иметь решения, когда

$$\frac{a+1}{a-1} \leq 0, \text{ т.е. } -1 \leq a < 1.$$

Ответ: $[-1; 1]$.

Решение задания 8.

$$\cos u \cdot e^{1-\cos 2u} = p$$

Выполнив определенные преобразования, будем иметь:

$$\cos u \cdot e^{2-2\cos^2 u} = p$$

Пусть $\cos u = t$, $-1 \leq t \leq 1$, тогда уравнение $\cos u \cdot e^{2-2\cos^2 u} = p$

примет вид $t \cdot e^{2-2t^2} = p$.

Пусть $g = t \cdot e^{2-2t^2}$. Уравнение $t \cdot e^{2-2t^2} = p$ имеет хотя бы один корень, если $p \in E(g)$.

Найдем $E(g)$ с помощью производной.

$$g' = e^{2-2t^2}(1 - 4t^2), t \in [-1; 1],$$

$$g' = 0, \text{ тогда } t = \pm \frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e},$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e},$$

$$g(1) = 1,$$

$$g(-1) = -1.$$

$$\text{Тогда } E(g) = \left[-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e}; \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e}; \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{e}\right].$$

§5. Решение уравнений и неравенств с параметрами и их систем с помощью свойства четности функций

Теоретическая справка

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ выполняются условия:

$$1) -x \in D(f),$$

$$2) f(-x) = f(x).$$

График четной функции на всей области определения симметричен относительно оси Oy .

Примеры четных функций: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \cos x$, $y = x^2 + |x|$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ выполняются условия:

$$1) -x \in D(f),$$

$$2) f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции на всей области определения симметричен относительно начала координат.

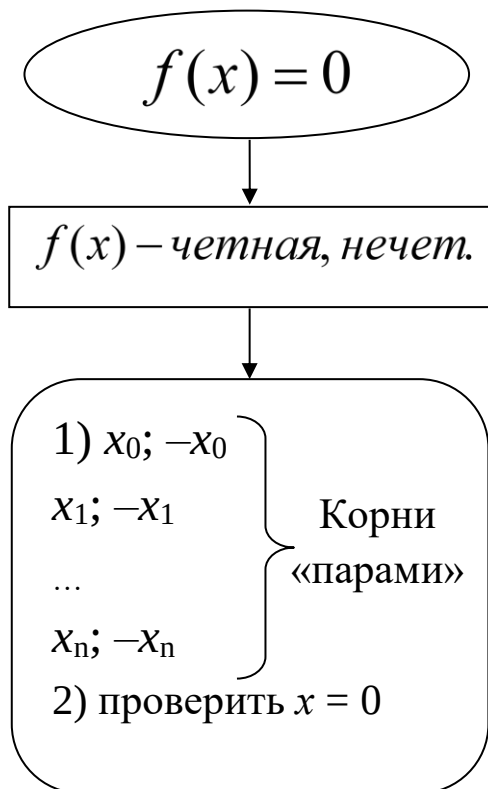
Примеры нечетных функций: $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = x$.

Свойства четных и нечетных функций

- а) Сумма четных функций является четной функцией.
- б) Сумма нечетных функций является нечетной функцией.
- в) Произведение двух четных функций является четной функцией.
- г) Произведение двух нечетных функций является четной функцией.
- д) Произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией.
- е) Если функция f четна, то и функция $\frac{1}{f}$ четна.
- ж) Если функция f нечетна, то и функция $\frac{1}{f}$ нечетна.

Для формирования у школьников умений применять свойство четности функций, в частности для определения числа корней уравнения, в качестве ООД

для учащихся может выступать следующая схема:



Для самостоятельной проверки знаний по теме выполните тест с последующим самоконтролем.

Тест по теме «Четность и нечетность функций»

1. Запишите номер, под которым стоит нечетная функция $h(t)$, если функции $y(x)$ и $g(x)$ определены на множестве действительных чисел:

- а) $h(t) = y(x) \cdot g^2(x)$, $y(x)$ – четная, $g(x)$ – нечетная
- б) $h(t) = y(x) - g(x)$, $y(x)$ – четная, $g(x)$ – четная
- в) $h(t) = y(x) + g(x)$, $y(x)$ – нечетная, $g(x)$ – нечетная
- г) $h(t) = y(x) \cdot g(x)$, $y(x)$ – нечетная, $g(x)$ – нечетная

2. Четными функциями являются: ...

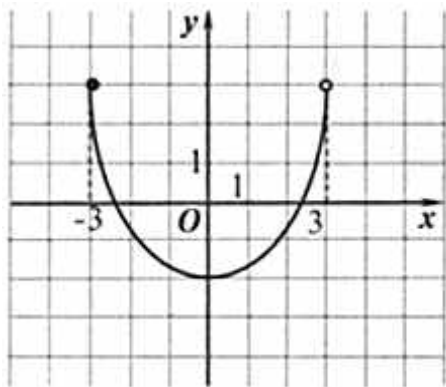
а) $g(t) = 2^t + 2^{-t}$

б) $g(t) = \frac{t^2 \sin t}{t^2 - 9}$

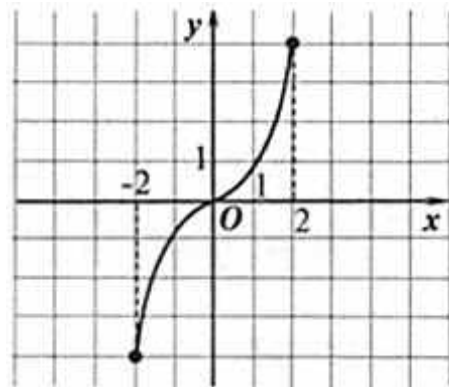
в) $g(t) = \frac{|t|}{\sin t \cdot \cos t}$

г) $g(t) = \frac{t + t g t}{t \cdot \cos t}$

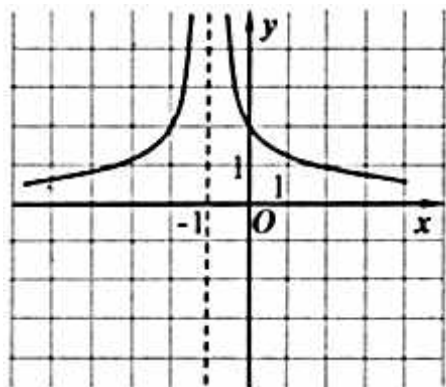
3. Номера рисунков, на которых изображен график четной функции: ...



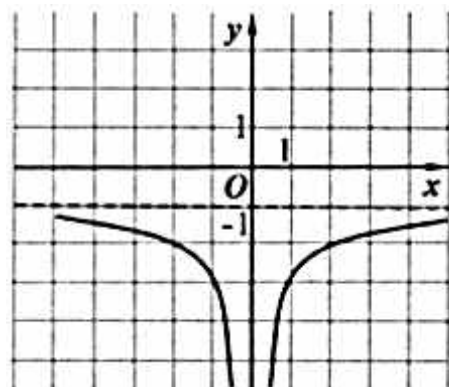
а)



б)



в)



г)

4. Нечетные функции: ...

а) $g = \cos 3t$

б) $g = 3 \sin 2t$

в) $g = \frac{t}{2} \cdot \sin^2 t$

г) $g = (t + 1)^2$

5. Функции не являющиеся ни четными, ни нечетными:

а) $g = \cos t + t$

б) $g = \sin t - t$

в) $g = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2t$

г) $g = \frac{\operatorname{tg} t}{2}$

6. Нечетная функция ...

а) $g = 2^{\cos t}$

б) $g = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$

в) $g = |\operatorname{tg} t|$

г) $g = \cos t \cdot \sin \frac{t}{2}$

7. Функция $h(t) = (0,4t^2 - 4t) \cos t$ является ...

а) четной

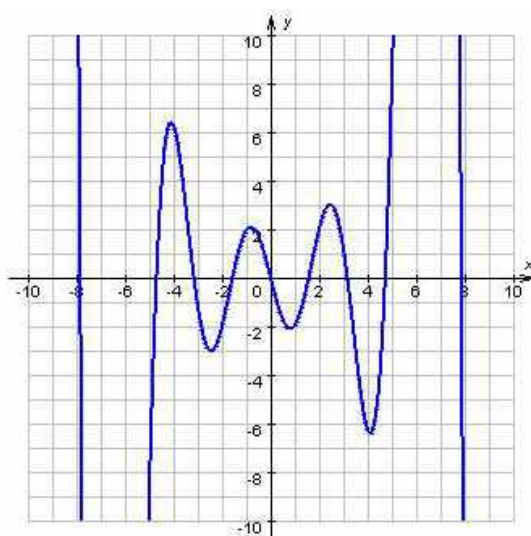
б) нечетной

8. Функция $h(t) = |t| \cos t + \frac{\cos t}{|t^2 - 5|}$ является ...

а) четной

б) нечетной

9. Функция является ..., график которой изображен на рисунке:



а) четной

б) нечетной

в) ни четной, ни нечетной

Самоконтроль выполнения тестовых заданий

1	2	3	4	5	6	7	8	9
в	аг	г	бв	ав	г	б	а	б

Практическое задание

Задание 1.

При каких значениях параметра p уравнение $u^2 + (p - 3)^2 = |u + 3 - p| + |u + p - 3|$ имеет единственный корень?

Решение.

Пусть $p - 3 = t$, тогда исходное уравнение примет вид

$$u^2 + m^2 - |u - m| - |u + m| = 0.$$

Функция $g = u^2 + m^2 - |u - m| - |u + m|$ четная, т.к. $g(-u) = g(u)$ при любых $u \in D(g)$. Следовательно, если u_0 – корень исходного уравнения, то $-u_0$ также корень этого уравнения.

По условию задачи корень единственный, поэтому $u_0 = -u_0$, $2u_0 = 0$, $u_0 = 0$. Таким образом, $u_0 = 0$ – корень исходного уравнения. Тогда имеем уравнение:

$$(p - 3)^2 = 2|p - 3|,$$

$$|p - 3|(|p - 3| - 2) = 0,$$

$$p - 3 = 0 \text{ или } |p - 3| = 2,$$

$$p = 3 \text{ или } \begin{cases} p = 5, \\ p = 1. \end{cases}$$

Проверим все найденные p на предмет выполнения требования задания 1.

1) Пусть $p = 3$.

Исходное уравнение примет вид $u^2 = |u| + |u|$, откуда $u = 0; -2; 2$.

Получили три решения, что не удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $p = 5$

Исходное уравнение примет вид $u^2 + 4 = |u - 2| + |u + 2|$.

Если $u \geq 2$, то $u^2 - 2u + 4 = 0$ – нет корней.

Если $-2 \leq u < 2$, то $u^2 = 0$; $u = 0$ – единственный корень.

Если $u < -2$, то $u^2 + 2u + 4 = 0$ – нет корней.

Таким образом, при $p = 5$ исходное уравнение имеет единственный корень.

3) Аналогично проверяем $p = 1$. При $p = 1$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 1; 5.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

При каких значениях параметра m уравнение $u^2 - |u + 3 + m| = |u - 3 - m| - (3 + m)^2$ имеет единственный корень?

Ответ: 1; -5.

Задание 2.

При каких значениях параметра p уравнение $z^2 - |z - p + 6| = |z + p - 6| - (p - 6)^2$ имеет единственный корень?

Ответ: 4; 8.

Задание 3.

Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $u^2 + (1 - k)^2 = |u - 1 + k| + |u - k + 1|$ имеет единственный корень.

Ответ: таких значений k нет.

Задание 4.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\sqrt{z^4 + (p - 5)^4} = |z + p - 5| + |z - p + 5|$ имеет единственное решение.

Ответ: таких значений p нет.

Задание 5.

Найдите все значения параметра m , при которых уравнение $\sqrt{u^4 + (m + 3)^4} = |u + m + 3| + |u - m - 3|$ имеет единственный корень.

Ответ: -1 ; -5 .

Задание 6.

При каких значениях параметра p система $\begin{cases} pu^2 + p - 1 = v - |\sin u| \\ |tg u| + |v| = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: 2.

Задание 7.

Найдите все значения параметра p , при которых неравенство $\cos z - 2\sqrt{z^2 + 9} \leq -\frac{z^2 + 9}{p + \cos z} - p$ имеет единственное решение.

Ответ: 2.

Задание 8.

Дана функция $g = f(z)$, где $f(z) = 5^z + \frac{25}{5^z}$. При каких значениях параметра p функция $g = f(z + p)$ является четной?

Ответ: 1.

Задание 9.

Решите систему
$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^u + (2 + \sqrt{3})^u - 5 = p - 2v + v^2, \\ u^2 + (2 - p - p^2)v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0).

Задание 10.

Найдите все значения параметра p , при которых система

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v - 3p = u^2 + 6u + 5, \\ v^2 - (p^2 - 5p + 6)u^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: -1; 2.

Задание 11.

При каких значениях параметра p система
$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|u - 1|} = \sqrt{7|v|}, \\ 49v^2 + u^2 + 4p = 2u - 1; \end{cases}$$

имеет 4 решения?

Ответ: $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{32}$.

Самоконтроль. Решения заданий для самостоятельной работы**Решение задания 4.**

Рассмотрим функцию $g = \sqrt{z^4 + (p - 5)^4} - |z + p - 5| - |z - p + 5| -$
четная функция, т.к. $g(-z) = g(z)$ при любых $z \in R$.

Следовательно, если z_0 – корень исходного уравнения, то $-z_0$ также корень этого уравнения.

По условию задачи корень единственный, поэтому $z_0 = -z_0$, $2z_0 = 0$, $z_0 = 0$.
Таким образом, $z_0 = 0$ – корень исходного уравнения. Подставив в исходное уравнение значение $z=0$, получим:

$$\sqrt{(p - 5)^4} = |p - 5| + |p - 5|,$$

$$|p - 5|^2 = 2|p - 5|,$$

$$|p - 5| = 0 \text{ или } |p - 5| = 2$$

$$p = 5 \qquad p = 7; p = 3.$$

Проверив все полученные значения параметра, убедимся, что нет таких p , при которых исходное уравнение имело бы единственное решение.

Ответ: таких значений p нет.

Решение задания 5.

Рассмотрим функцию $g = \sqrt{u^4 + (m+3)^4} - |u+m+3| - |u-m-3|$ – четная функция, т.к. $g(-u) = g(u)$ при любых $u \in R$. Если u_0 – корень исходного уравнения, то $-u_0$ также корень этого уравнения. По условию задачи корень единственный, поэтому $u_0 = -u_0$, $2u_0 = 0$, $u_0 = 0$. Таким образом, $u_0 = 0$ – корень исходного уравнения. значит, $u=0$ – корень уравнения. Подставив в исходное уравнение значение $u=0$, получим:

$$\sqrt{(m+3)^4} = |m+3| + |m+3|,$$

$$|m+3|^2 = 2|m+3|,$$

$$|m+3|^2 - 2|m+3| = 0,$$

$$|m+3| = 0 \quad \text{или} \quad |m+3| = 2$$

$$m = -3 \quad m = -3; m = -1.$$

Проверим все m на предмет удовлетворенности требованию задания.

1) $m = -3$.

$$\sqrt{u^4} = 2|u|,$$

$$u^2 = 2|u|,$$

$$|u|(|u| - 2) = 0,$$

$$u = 0; u = 2; u = -2.$$

Получили три корня, следовательно, $m = -3$ – не подходит по условию задачи.

2) $m = -1$.

$$\sqrt{u^4 + 16} = |u+2| + |u-2|,$$

$$u^4 + 16 = u^2 + 4u + 4 + 2|u^2 - 4| + u^2 - 4u + 4,$$

$$u^4 - 2u^2 - 2|u^2 - 4| + 8 = 0.$$

При $u \geq 2$ уравнение $u^4 - 4u^2 + 16 = 0$ не имеет действительных корней.

При $-2 \leq u < 2$ $u^4 = 0; u = 0$ – единственный корень.

При $u \leq -2$ – нет корней.

Следовательно, $m = -1$ подходит по условию задачи.

3) Случай $m = -5$ аналогичен случаю $m = -1$.

$u = 0$ – единственный корень.

Ответ: $-1; -5$.

Решение задания 6.

Оба уравнения системы содержат четные функции u^2 , $|\sin u|$, $|\operatorname{tg} u|$ (т.к. т.к. $g(-z) = g(z)$ при любых $z \in D(g)$, $D(g) = R$).

$(0; v)$ – единственное решение заданной системы. Подставим $u = 0$:

$$\begin{cases} p - 1 = v, \\ |v| = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1, \\ p = 2; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v_2 = -1, \\ p = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

$$1) \begin{cases} v = 1, \\ p = 2. \end{cases}$$

В этом случае исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2u^2 = 1 - |\sin u| - 1, \\ |\operatorname{tg} u| = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u^2 = -|\sin u|, \\ |\operatorname{tg} u| = 0; \end{cases}$$

$$u = 0.$$

Второе уравнение при $u = 0$ верно. Следовательно, при $p = 2$ решением системы является пара $(0; 1)$.

$$2) \begin{cases} v = -1, \\ p = 0. \end{cases}$$

В этом случае исходная система примет вид:

$$\begin{cases} -1 = -1 - |\sin u|, \\ |\operatorname{tg} u| = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -|\sin u| = 0, \\ |\operatorname{tg} u| = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin u = 0, \\ \operatorname{tg} u = 0; \end{cases}$$

$$u = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$(\pi n; 0), n \in \mathbb{Z}$ – решение системы, что не удовлетворяет условию единственности решения исходной системы.

Ответ: 2.

Решение задания 7.

Приведем неравенство к виду:

$$\cos z + p - 2\sqrt{z^2 + 9} + \frac{z^2 + 9}{p + \cos z} \leq 0,$$

$$\frac{(p + \cos z)^2 - 2(p + \cos z)\sqrt{z^2 + 9} + z^2 + 9}{p + \cos z} \leq 0,$$

$$\frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} \leq 0,$$

$$\text{Пусть } g(z) = \frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z}.$$

$$g(z) = \frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} - \text{четная функция, т.к. } g(-z) = g(z) \text{ при любых } z \in$$

$D(g)$. Если z_0 – корень уравнения $\frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} = 0$, то $-z_0$ также корень этого уравнения. По условию задачи решение единственное, поэтому $z_0 = -z_0$, $2z_0 = 0$, $z_0 = 0$. Таким образом, $z_0 = 0$ – корень уравнения $\frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} = 0$.

Следовательно, $z = 0$ – решение исходного неравенства.

Подставив $z = 0$ в неравенство $\frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} \leq 0$ (или в исходное неравенство), получим:

$$\frac{(p-2)^2}{p+1} \leq 0,$$

$$\begin{cases} p = 2, \\ p < -1. \end{cases}$$

Проверим, будет ли $z = 0$ единственным решением неравенства.

1) $p < -1$.

Неравенство $\frac{(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2}{p + \cos z} \leq 0$ будет выполняться для всех $z \in \mathbb{R}$, т.к. при

$p < -1$ получим $p + \cos z < 0$ и $(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2 \geq 0$.

Следовательно, $p < -1$ не подходит по условию задания.

2) $p = 2$.

Тогда $2 + \cos z > 0$ для всех $z \in R$, поэтому $(p + \cos z - \sqrt{z^2 + 9})^2 \leq 0$, следовательно, $2 + \cos z - \sqrt{z^2 + 9} = 0$.

$$2 + \cos z = \sqrt{z^2 + 9},$$

$z = 0$ – единственный корень уравнения, т.к. при любых z не равных нулю получаем $2 + \cos z = \sqrt{z^2 + 9}$ – неверное равенство, т.к. $2 + \cos z \leq 3$, а $\sqrt{z^2 + 9} > 3$.

Ответ: 2.

Решение задания 8.

Область определения функции $g = f(z + p)$ – множество действительных чисел, поэтому для ее четности достаточно потребовать выполнения равенства $g = f(z + p) = f(-z + p)$ при любых z .

Тогда,

$$5^{z+p} + \frac{25}{5^{z+p}} = 5^{-z+p} + \frac{25}{5^{-z+p}},$$

$$5^z \cdot 5^p + 5^{2-z-p} = 5^{-z} \cdot 5^p + 5^{2+z-p},$$

$$5^z(5^p - 5^{2-z}) + 5^{-z}(5^{2-p} - 5^p) = 0,$$

$$(5^z - 5^{-z})(5^p - 5^{2-p}) = 0.$$

Для того чтобы полученное уравнение выполнялось при любых значениях z , необходимо, чтобы $5^p - 5^{2-p} = 0$, т.к. $f(z) \cdot 0 = 0$ при любых $z \in D(g)$.

Решим полученное уравнение:

$$5^p - 5^{2-p} = 0,$$

$$5^p = 5^{2-p},$$

$$p = 1.$$

Ответ: 1.

Решение задания 9.

Т.к. $2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$, то исходная система примет вид:

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^u + (2 + \sqrt{3})^u - 5 = p - 2v + v^2, \\ u^2 + (2 - p - p^2)v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Заметим, что в систему входят лишь четные функции от u и областью определения являются все $u \in R$. А потому $u = 0$ будет решением каждого уравнения, а, следовательно, и решением системы. Подставим в систему $u = 0$:

$$\begin{cases} -3 = p - 2v + v^2, \\ (2 - p - p^2)v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2; \\ v = 0, \\ p = -3 \text{ или } p = -2 \text{ или } p = -1. \end{cases}$$

Проверим, имеет ли полученная система решения при найденных значениях p .

1) $p = -3$.

$$\begin{cases} -3 = -3 - 2v + v^2, \\ v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2; \\ v = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $p = -3$ система будет единственное решение $(0; 0)$.

2) $p = -2$.

$$\begin{cases} -3 = -2 - 2v + v^2, \\ v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2; \\ v = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $p = -2$ система будет единственное решение $(0; 0)$.

3) $p = -1$.

$$\begin{cases} -3 = -1 - 2v + v^2, \\ v^2 = 0, \\ 0 \leq v \leq 2. \end{cases}$$

Первое уравнение системы при $v = 0$ обращается в неверное равенство, следовательно, при $p = -1$ система не будет иметь решений.

Ответ: $(0; 0)$.

Решение задания 10.

$$\text{Заметим, что } 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1}.$$

С учетом выполненного преобразования можно сделать вывод о том, что в систему входят лишь четные функции от u и областью определения являются все $v \in R$. Если $(u_0; v_0)$ – решение системы, то $(u_0; -v_0)$ также решение этой системы. Значит, для того, чтобы решение было единственным необходимо, чтобы $v_0 = -v_0$, т.е. $v_0 = 0$.

При $v_0 = 0$ исходная система примет вид:

$$\begin{cases} u^2(p^2 - 5p + 6) = 0, \\ u^2 + 6u + 3 + 3p = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = 0 \text{ или } p^2 - 5p + 6 = 0 \\ u^2 + 6u + 3 + 3p = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -1, \\ p = 2, \\ p = 3. \end{cases}$$

Проверим каждое из найденных значений.

1) $p = -1$.

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v - 3p = u^2 + 6u + 5, \\ v^2 - 12u^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что $(3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v \geq 2$ (как сумма двух взаимнообратных выражений, принимающих положительные значения); $u^2 + 6u + 5 = (u + 3)^2 - 7 \leq 2$ при $-6 \leq u \leq 0$, поэтому, опираясь на метод мажорант, будем иметь:

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v = 2, \\ u^2 + 6u + 2 = 2, \\ v^2 - 12u^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 0, \\ u = 0, \\ u = -6, \\ -6 \leq u \leq 0, \\ v^2 - 12u^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 0, \\ u = 0. \end{cases}$$

При $p = -1$ единственное решение $(0; 0)$.

2) $p = 2$.

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v = u^2 + 6u + 11, \\ v^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 0, \\ u = -3. \end{cases}$$

При $p = 2$ единственное решение $(-3; 0)$.

3) $p = 3$.

$$\begin{cases} (3 - 2\sqrt{2})^v + (3 + 2\sqrt{2})^v = u^2 + 6u + 14, \\ v^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 + 6u + 12 = 0, \\ v^2 = 0, \\ -6 \leq u \leq 0; \end{cases} \quad \text{система не имеет решений.}$$

Ответ: $-1; 2$.

Решение задания 11.

Пусть $u - 1 = t$, $7v = n$, тогда, выполнив соответствующие преобразования второго уравнения системы и приведя его к виду $(7v)^2 +$

$$(u - 1)^2 = -4p \text{ исходная система сведется к системе: } \begin{cases} \sqrt{|t|} + \sqrt{|n|} = 1, \\ t^2 + n^2 = -4p. \end{cases}$$

Заметим, что полученная система не изменится, если поменять t на $-t$, n на $-n$, и если поменять местами t и n . Таким образом, если $(t_0; n_0)$ – решение системы, то решениями системы будут также следующие пары чисел: $(-t_0; n_0)$, $(t_0; -n_0)$, $(-t_0; -n_0)$, $(n_0; t_0)$, $(-n_0; t_0)$, $(n_0; -t_0)$, $(-n_0; -t_0)$. Итого 8 решений.

По условию задачи нам нужно 4 решения, что возможно, когда:

1) $t_0 = 0$, тогда $(0; n_0)$, $(n_0; 0)$, $(-n_0; 0)$, $(0; -n_0)$;

2) $n_0 = 0$, тогда $(t_0; 0)$, $(-t_0; 0)$, $(0; t_0)$, $(0; -t_0)$;

3) $t_0 = n_0$, тогда $(t_0; -n_0)$, $(-t_0; -n_0)$, $(n_0; t_0)$, $(-n_0; -t_0)$.

Рассмотрим все эти случаи.

$$1) \quad t_0 = 0, \text{ тогда } \sqrt{|n|} = 1, n = 1; t^2 + n^2 = -4p, p = -\frac{1}{4}.$$

$$2) \quad n_0 = 0, \text{ тогда } \sqrt{|t|} = 1, t = 1; t^2 + n^2 = -4p, p = -\frac{1}{4}.$$

$$3) \quad t_0 = n_0, \text{ тогда } 2\sqrt{|t_0|} = 1, t_0 = \frac{1}{4}, n_0 = \frac{1}{4}; \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = -4p, p = -\frac{1}{32}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{32}$.

§6. Графический метод для решения уравнений, неравенств с параметрами и их систем

Теоретическая справка

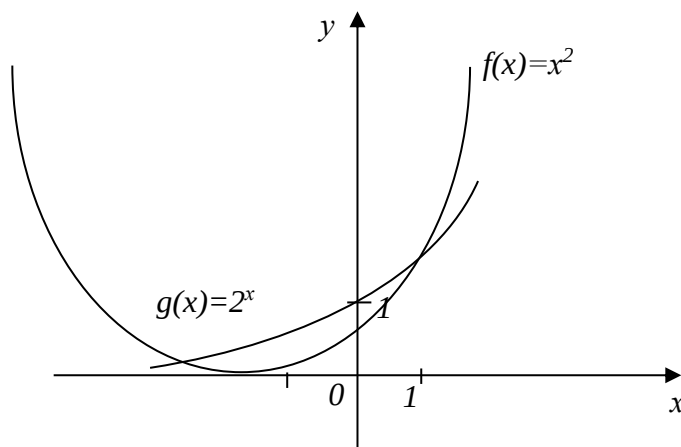
Суть графического способа решения уравнений и неравенств заключается в том, что необходимо построить эскизы графиков двух функций, входящих в уравнение или неравенство и стоящих в разных его частях. Полученный рисунок помогает выяснить, на какие множества следует разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения или неравенства было очевидным.

Примечания.

1) Найденное с помощью графиков решение – приближенное, его нельзя писать в ответ без обоснования.

2) Иногда на рисунке не видны все решения.

Например, если для решения уравнения $x^2 = 2^x$ графическим способом сделать следующий рисунок:



По данному рисунку можно увидеть только два решения из трех имеющихся (видно две точки пересечения графиков, хотя на самом деле их три).

На промежутке $(-\infty; 0)$ $f(x)$ убывает, а $g(x)$ – возрастает, поэтому на данном промежутке уравнение имеет одно решение.

На промежутке $(0; +\infty)$ – два решения: одно из них изображено точкой пересечения на рисунке, а второе – вне рисунка. Существование второй точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ обусловлено тем, что при $x \rightarrow +\infty$ показательная функция растет быстрее, чем степенная, а значит график функции

$g(x)$ «догонит» график $f(x)$. Такой вывод основывается на следующей *теореме 1*:

Теорема 1. Если $a > 1$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$).

Опираясь на эту теорему, можно сказать, что при достаточно больших x график функции $y = a^x$ расположен выше графика функции $y = x^n$, другими словами любая показательная функция возрастает быстрее любой степенной функции.

Имеет место также *теорема 2*:

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$).

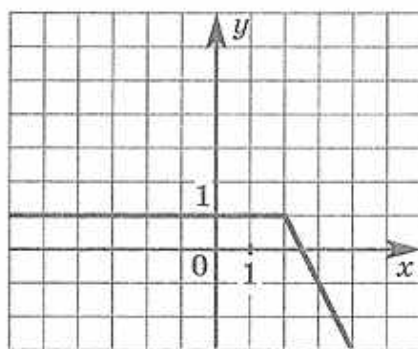
Опираясь теорему 2, можно также сказать, что степенная функция растет быстрее логарифмической.

Для самостоятельной проверки знаний по теме выполните тест с последующим самоконтролем.

Тест по теме «Графики функций»

Цель тестирования с самоконтролем – проверка знаний и умений соотносить график функции с соответствующей формулой, а также находить решения уравнений и неравенств при помощи графиков входящих в них функций.

1. График какой функции, из перечисленных, изображен на рисунке?



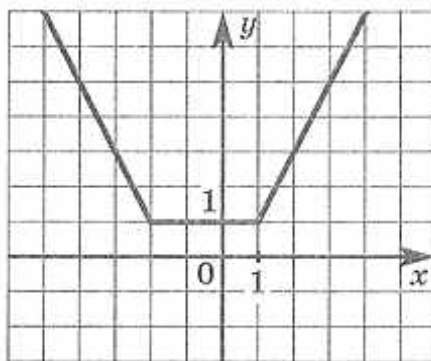
а) $y = -|x - 2| - x + 3$

в) $y = -|x + 2| + x + 3$

б) $y = -|x + 2| - x - 1$

г) $y = |x + 2| + x + 1$

2. График какой функции, из перечисленных ниже, изображен на рисунке?



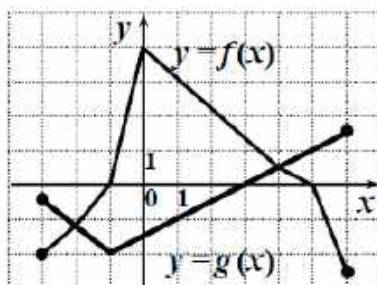
а) $y = |x + 2| + |x - 1| - 2$

в) $y = -|x + 2| + |x - 1| + 2$

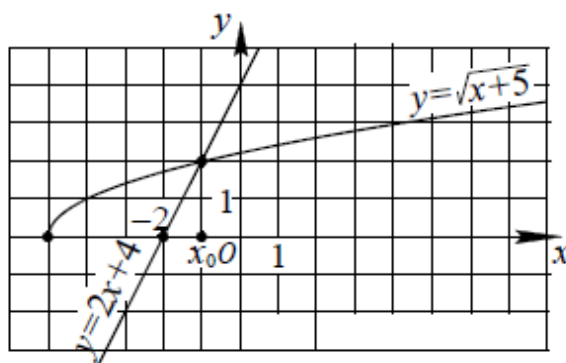
б) $y = |x - 2| + |x + 1| + 2$

г) $y = -|x + 2| - |x - 1| - 2$

3. На рисунке изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Решением неравенства $f(x) > g(x)$ будет промежуток ...



4. На рисунке изображены графики функций $y = 2x + 4$ и $y = \sqrt{x + 5}$. Решением неравенства $\sqrt{x + 5} > 2x + 4$ будет промежуток ...



Самоконтроль выполнения тестовых заданий

1	2	3	4
a	a	$(-2; 4)$	$(-4; -1)$

Практические задания

Задание 1.

При каких значениях параметра p уравнение $6\sqrt{u-2} > pu + 7$ имеет единственное решение?

Решение.

Графический способ решения задания 1.

Пусть $y = 6\sqrt{u-2}$, $y = pu + 7$.

$y = pu + 7$ – семейство прямых, проходящих через точку $(0; 7)$.

Обратимся к рис. 38.

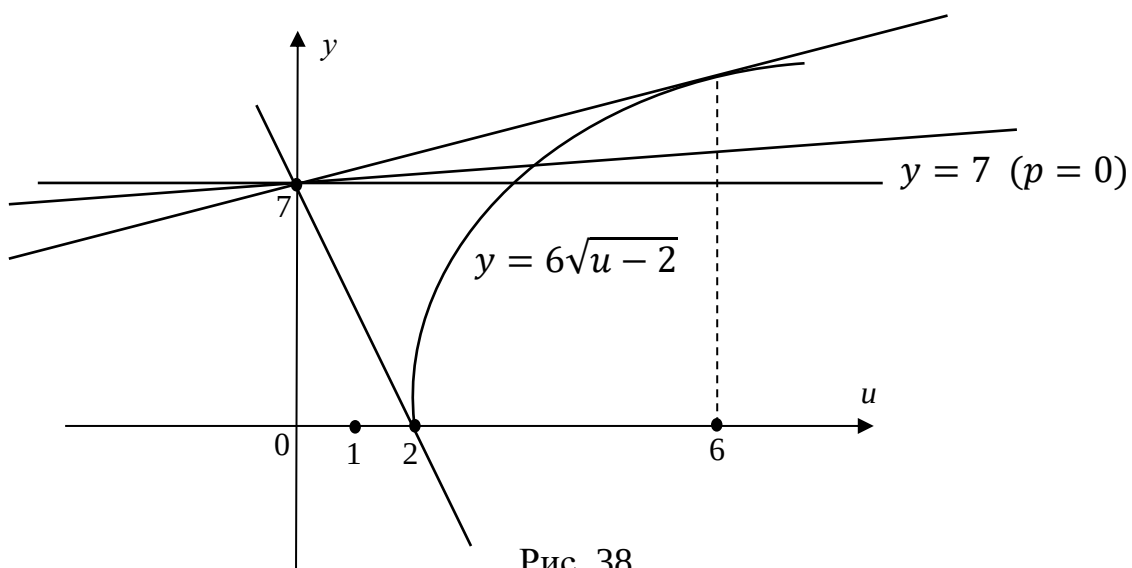


Рис. 38

1) При $p = 0$ уравнение будет иметь единственное решение.

2) Пусть $p < 0$.

Найдем p , при которых прямая $y = pu + 7$ проходит через точку $(2; 0)$:

$$0 = 2p + 7; p = -\frac{7}{2}.$$

Заметим, что при $-\frac{7}{2} \leq p < 0$ данное уравнение будет иметь единственное решение, т.к. $y = 6\sqrt{u-2}$ – возрастающая функция, а $y = pu + 7$ – убывающая функция при указанных значениях p . Следовательно, при $-3,5 \leq p < 0$, исходное уравнение будет иметь единственное решение.

3) Пусть $p > 0$.

В этом случае прямая $y = pu + 7$ либо пересекает кривую $y = 6\sqrt{u-2}$ либо является касательной к ней.

В том случае, когда прямая $y = pu + 7$ является касательной к данной кривой, исходное уравнение будет иметь единственное решение. Найдем те значения p , при которых уравнение $6\sqrt{u-2} = pu + 7$ будет иметь единственное решение.

$$p^2u^2 + 2(7p - 18)u + 121 = 0,$$

$$D_1 = (7p - 18)^2 - 121p^2 = (p - 1)(p + 4,5).$$

Квадратное уравнение имеет единственное решение, когда $D_1 = 0$,

$$\begin{cases} p = 1, \\ p = -4,5. \end{cases}$$

В том случае, когда прямая $y = pu + 7$ пересекает кривую $y = 6\sqrt{u-2}$, точек пересечения будет две, т.к. функция $y = u$ возрастает быстрее кривой $y = 6\sqrt{u-2}$. Следовательно, исходное уравнение будет иметь два решения.

Ответ: $[-3,5; 0] \cup \{1\}$.

Аналитический способ решения задания 1.

Пусть $\sqrt{u-2} = t, t \geq 0$,

$$u - 2 = t^2, u = t^2 + 2, \text{ тогда } pt^2 - 6t + 7 + 2p = 0.$$

Сформулируем новую задачу: найти значения p , при которых уравнение $pt^2 - 6t + 7 + 2p = 0$ имеет единственный неотрицательный корень.

1) $p = 0$.

$$t = \frac{7}{6} - \text{единственный корень.}$$

2) $p \neq 0$.

$$D_1 = -2p^2 - 7p + 9.$$

о Если $D_1 = 0$, тогда $\begin{cases} p = 1, \\ p = -4,5. \end{cases}$

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения p условию новой задачи.

$$\text{При } p = 1 \quad t = 3 > 0.$$

$$\text{При } p = -4,5 \quad t = -\frac{2}{3} < 0.$$

Таким образом, при $p = 0, p = 1$ исходное уравнение имеет единственное

решение.

Если $D_1 > 0$, то уравнение будет иметь два корня. Для выполнения новой задачи необходимо, чтобы только один из них был отрицательным,

поэтому: $\begin{cases} D_1 > 0, \\ \frac{7+2p}{p} < 0; \end{cases}$ откуда $-3,5 < p < 0$.

Проверим $p = -3,5$, тогда $-3,5t^2 - 6t + 7 - 7 = 0$, т.е. $3,5t^2 + 6t = 0$ откуда:

$$\begin{cases} t = 0, \\ t = -\frac{12}{7}. \end{cases}$$

$t = -\frac{12}{7}$ не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

При $t = 0$ $p = -3,5$.

Ответ: $[-3,5; 0] \cup \{1\}$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

При каких значениях параметра m система уравнений $\begin{cases} \log_2 u + \log_2 v = 6, \\ v = 8 + m(u - 6), \end{cases}$

имеет два различных решения?

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{4}{9}; 0\right)$.

Задание 2.

При каких значениях параметра p система $\begin{cases} u^2 + uv - 7u - 14v + 49 = 0, \\ v = pu^2 + 1, \\ u \geq 3, \end{cases}$

имеет одно решение?

Ответ: $\left\{-\frac{1}{24}; 0\right\} \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

Задание 3.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $p^2 + 7|u + 1| + 5\sqrt{u^2 + 2u + 5} = 2p + 3|u - 4p + 1|$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $[-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; +\sqrt{39}]$.

Задание 4.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $|z^2 - 1| + |z^2 - z - 2| = z^2 + 3z + p$ имеет три решения.

Ответ: $2; \frac{10}{3}$.

Задание 5.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $5|u - 3p| + |u - p^2| + 4z = p$ не имеет решения. В ходе решения воспользуйтесь примечанием.

Примечание. Рекомендуется рассмотреть два случая: 1) $3p > p^2$; 2) $3p < p^2$.

Ответ: $(-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$.

Задание 6.

Найдите все значения параметра k , при которых уравнение $(|u + 2| + |u - k|)^2 - 5(|u + 2| + |u - k|) + 3k(5 - 3k) = 0$ имеет два решения.

Ответ: $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (1; +\infty)$.

Задание 7.

Найдите все значения параметра t , при которых уравнение $tz + \sqrt{3 - 2z - z^2} = 4t + 2$ имеет единственное решение.

Ответ: $[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}) \cup \{0\}$.

Задание 8.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $6p + \sqrt{5 + 4z - z^2} = pz + 3$ имеет единственное решение.

Ответ: $\{0\} \cup (\frac{3}{7}; 3]$.

Задание 9.

При каких значениях параметра k уравнение $kz + \sqrt{-7 - 8z - z^2} = 2k + 3$ имеет единственное решение?

Ответ: $\{0\} \cup [-1; -\frac{1}{3}]$.

Задание 10.

Найдите все значения параметра p , при которых система

$$\begin{cases} g = \sqrt{5 + 4z - z^2} + 2, \\ g = \sqrt{9 - p^2 + 2pz - z^2} + p, \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$

Ответ: $[-1; 2) \cup (2; 5]$.

Самоконтроль. Решения заданий для самостоятельной работы

Решение задания 1.

Графический способ

$$\begin{cases} \log_2 u + \log_2 v = 6, \\ v = 8 + m(u - 6). \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы:

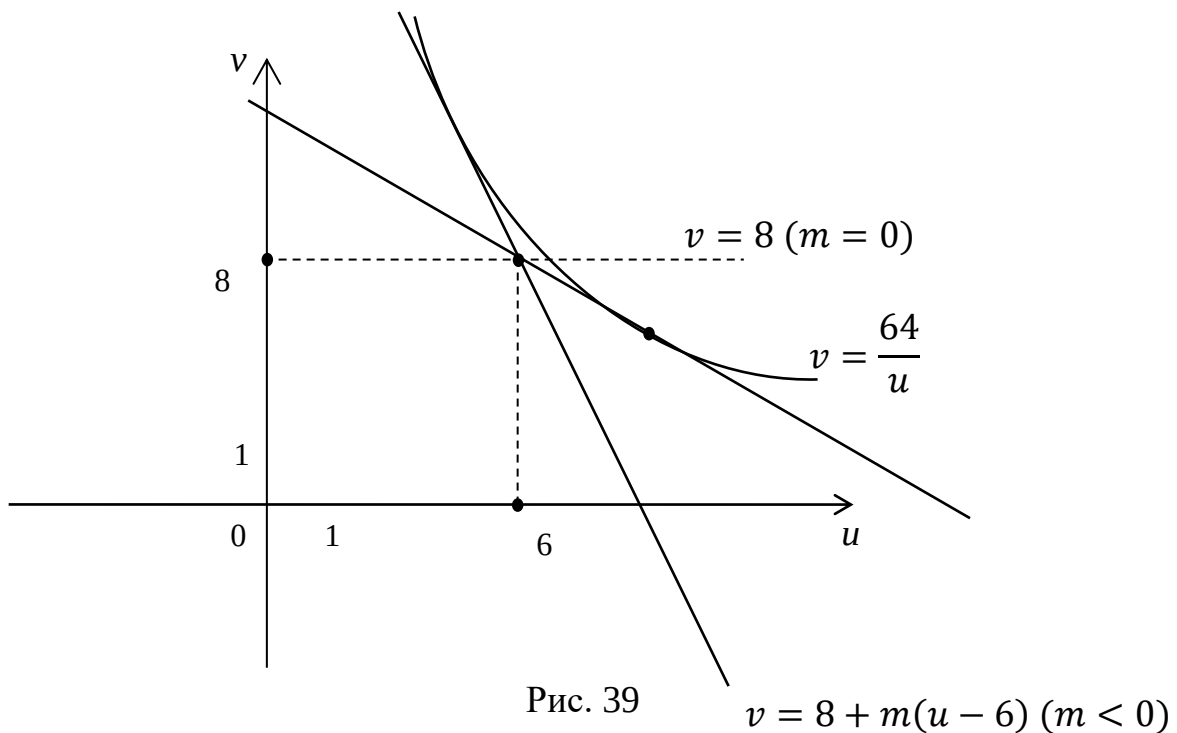
$$\begin{cases} \log_2 uv = \log_2 64, u > 0, v > 0, \\ v = 8 + m(u - 6); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 64, u > 0, v > 0, \\ v = 8 + m(u - 6). \end{cases}$$

$v = 8 + m(u - 6)$ – семейство прямых, проходящих через точку $(6; 8)$.

$v = \frac{64}{u}, u > 0, v > 0$, – графиком является ветвь гиперболы, расположенная

в I четверти системы координат.

Обратимся к рис. 39.



1) При $m = 0$ система будет иметь одно решение.

2) При $m > 0$ система имеет одно решение, т.к. одна функция возрастает, а другая убывает.

3) Пусть $m < 0$.

Прямая $v = 8 + m(u - 6)$ касается гиперболы, следовательно, уравнение $\frac{64}{u} = 8 + m(u - 6)$ должно иметь единственное решение, а потому и уравнение $mu^2 + (8 - 6m)u - 64 = 0$ также должно иметь единственное решение:

$$D_1 = 0,$$

$$9m^2 + 40m + 16 = 0,$$

$$\begin{cases} m = -\frac{4}{9}, \\ m = -4. \end{cases}$$

Следовательно, при $m = -\frac{4}{9}, m = -4$ прямая $v = 8 + m(u - 6)$ и гипербола имеют одну общую точку. Прямая и гипербола пересекаются в двух точках, если $-\frac{4}{9} < m < 0; m < -4$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{4}{9}; 0\right)$.

Аналитический способ

Полученное уравнение $mu^2 + (8 - 6m)u - 64 = 0$, где $m < 0$ можно решить аналитически.

Переформулируем задачу: при каких значениях m уравнение $mu^2 + (8 - 6m)u - 64 = 0$ имеет два корня?

Так как речь идет о двух корнях, то в полученном квадратном уравнении $m \neq 0$, тогда $u^2 + \frac{(8-6m)u}{m} - \frac{64}{m} = 0$.

Для ответа на вопрос задачи составим систему $\begin{cases} D > 0, \\ m < 0. \end{cases}$ Решением

полученной системы будет совокупность: $\begin{cases} -\frac{4}{9} < m < 0, \\ m < -4. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{4}{9}; 0\right)$.

Решение задания 2.

Преобразуем первое уравнение системы, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} (v-7)(v-7+u) = 0, \\ v = pu^2 + 1, \\ u \geq 3; \end{cases} \quad \text{следовательно,} \quad \begin{cases} v = 7, \\ v = -u + 7, \\ v = pu^2 + 1, \\ u \geq 3. \end{cases}$$

Задание свелось к решению *новой задачи*: найти все значения p , при которых парабола $v = pu^2 + 1$ имеет одну общую точку с объединением лучей (рис. 40).

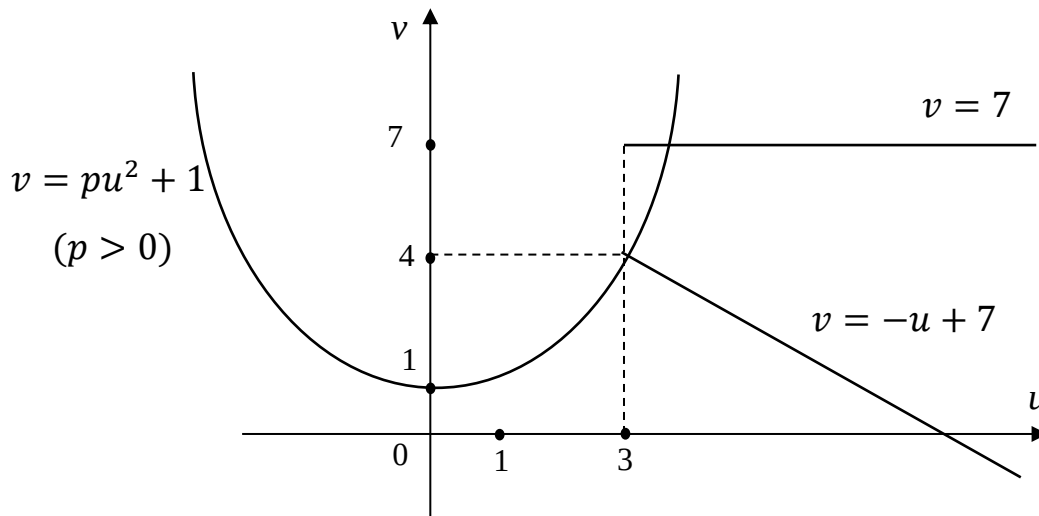


Рис. 40

1) Пусть $p = 0$. Система будет иметь одно решение: $v = 1, u = 6$.

2) Пусть $p > 0$. Обратимся к рис. 15.

Если парабола (график функции $v = pu^2 + 1$) проходит через точку $(3; 4)$, то система будет иметь два решения. Подставим координаты этой точки в уравнение $v = pu^2 + 1$, тогда $4 = p \cdot 9 + 1, p = \frac{1}{3}$.

Если парабола проходит через точку $(3; 7)$, то система будет иметь одно решение. Подставим координаты этой точки в уравнение $v = pu^2 + 1$, тогда $7 = p \cdot 9 + 1, p = \frac{2}{3}$.

Следовательно при $p \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ система будет иметь одно решение.

3) Пусть $p < 0$.

Для того чтобы система имела единственное решение необходимо, чтобы

парабола касалась прямой $v = -u + 7$.

Эта ситуация продемонстрирована на рис. 41.

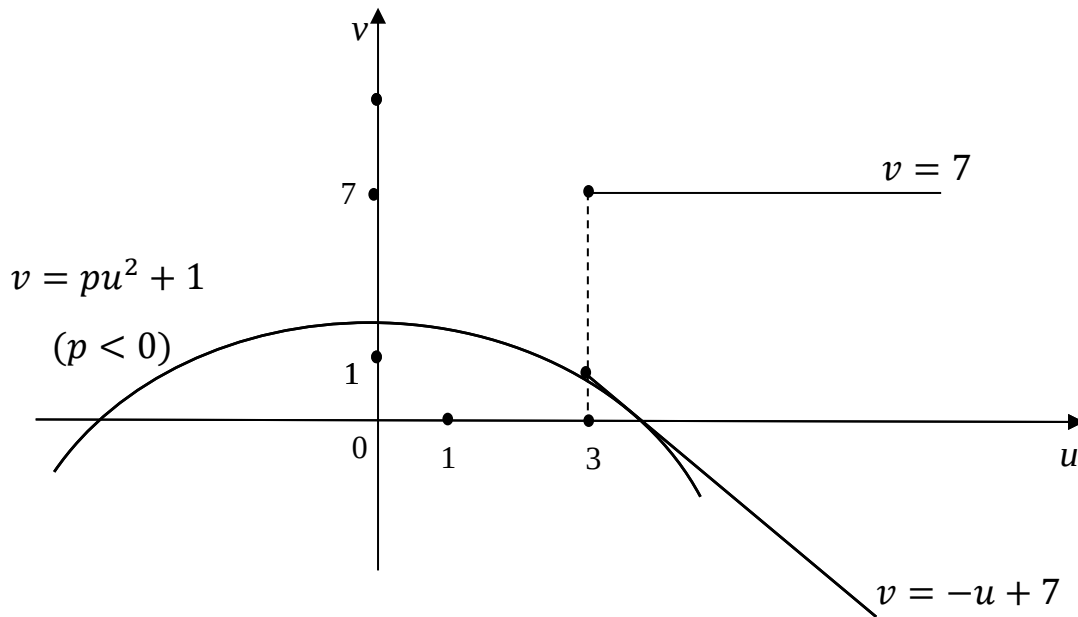


Рис. 41

Составим уравнение $pu^2 + 1 = -u + 7$.

$$pu^2 + 1 = -u + 7, pu^2 + u - 6 = 0, D = 1 + 24p.$$

Уравнение будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда

$$D = 0, \text{ т.е. } p = -\frac{1}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{1}{24}; 0\right\} \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

Решение задания 3.

Пусть $u + 1 = t$, тогда исходное уравнение примет вид

$$p^2 + 7|t| + 5\sqrt{t^2 + 4} = 2p + 3|t - 4p|.$$

$$5\sqrt{t^2 + 4} = 2p + 3|t - 4p| - 7|t| - p^2.$$

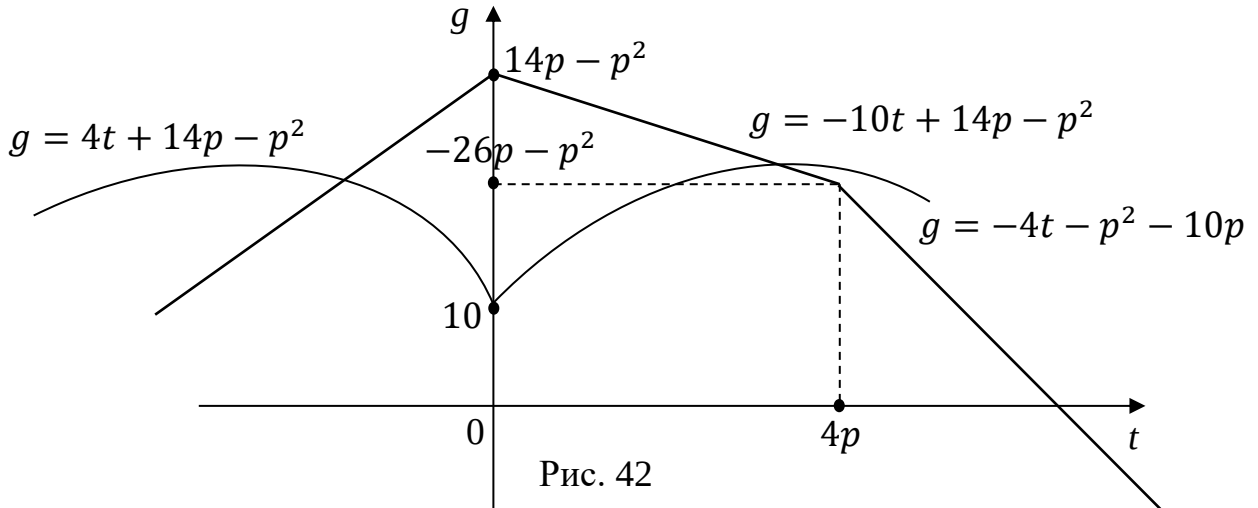
$g = 5\sqrt{t^2 + 4}$ при $t = 0, g = 10$, причем слева от нуля функция убывает,

справа – возрастает, т.к. $g' = \frac{5t}{\sqrt{t^2 + 4}} > 0$ при $t > 0$.

Построим график функции $g = 2p + 3|t - 4p| - 7|t| - p^2$, используя метод интервалов.

Рассмотрим различные случаи.

1 случай. Пусть $4p \geq 0$.



$$t > 4p; g = -4t - p^2 - 10p.$$

$$t = 4p; g = -26p - p^2.$$

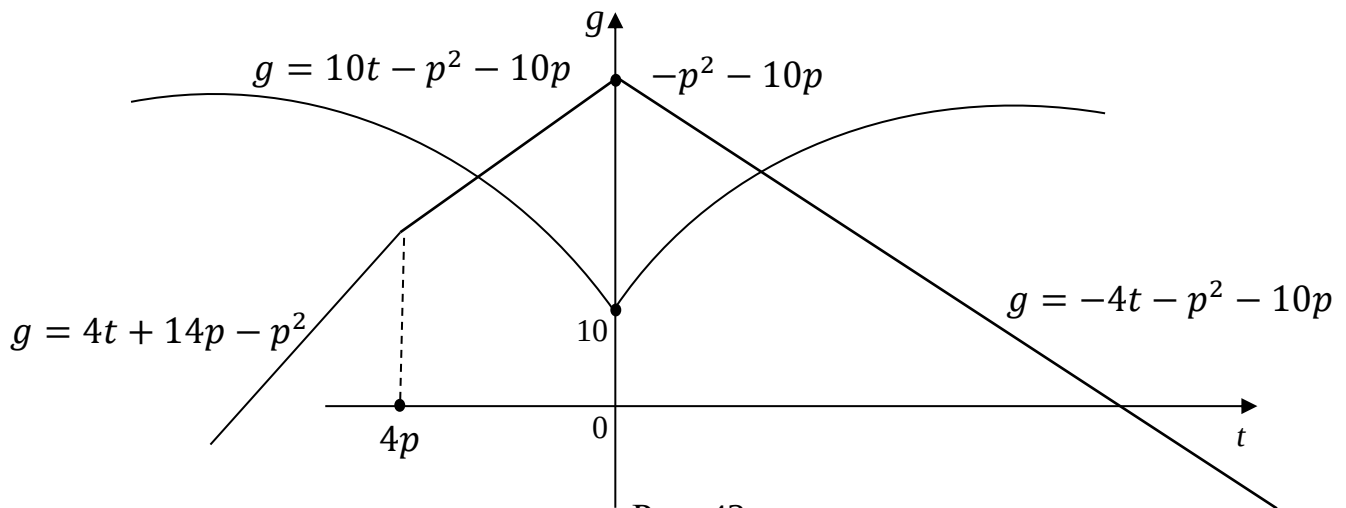
$$0 \leq t < 4p; g = -10t + 14p - p^2.$$

$$t = 0; g = 14p - p^2.$$

$$t < 0; g = 4t + 14p - p^2.$$

Обращаясь к рис. 42 (достаточно графики изображать схематично), замечаем: для того чтобы уравнение $5\sqrt{t^2 + 4} = 2p + 3|t - 4p| - 7|t| - p^2$ имело хотя бы один корень необходимо, чтобы $14p - p^2 \geq 10$, $7 - \sqrt{39} \leq p \leq 7 + \sqrt{39}$.

2 случай. $4p < 0$.



$$t \geq 0; g = -4t - p^2 - 10p.$$

$$t = 0; g = -p^2 - 10p.$$

$$4p \leq t < 0; g = 10t - p^2 - 10p.$$

$$t < 4p; g = 4t + 14p - p^2.$$

Обратившись к рис. 18 (достаточно графики изображать схематично), замечаем, что уравнение имеет хотя бы один корень тогда, когда $-p^2 - 10p \geq 10$; $-5 - \sqrt{15} \leq p \leq -5 + \sqrt{15}$

$$\text{Ответ: } [-5 - \sqrt{15}; -5 + \sqrt{15}] \cup [7 - \sqrt{39}; +\sqrt{39}].$$

Решение задания 7.

Преобразуем данное уравнение к виду $\sqrt{3 - 2z - z^2} = -mz + 4m + 2$.

Построим графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

$g = \sqrt{3 - 2z - z^2}$ – полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1; 0)$.

$g = -mz + 4m + 2, g = m(4 - z) + 2$ – прямая, проходящая через точку $(4; 2)$.

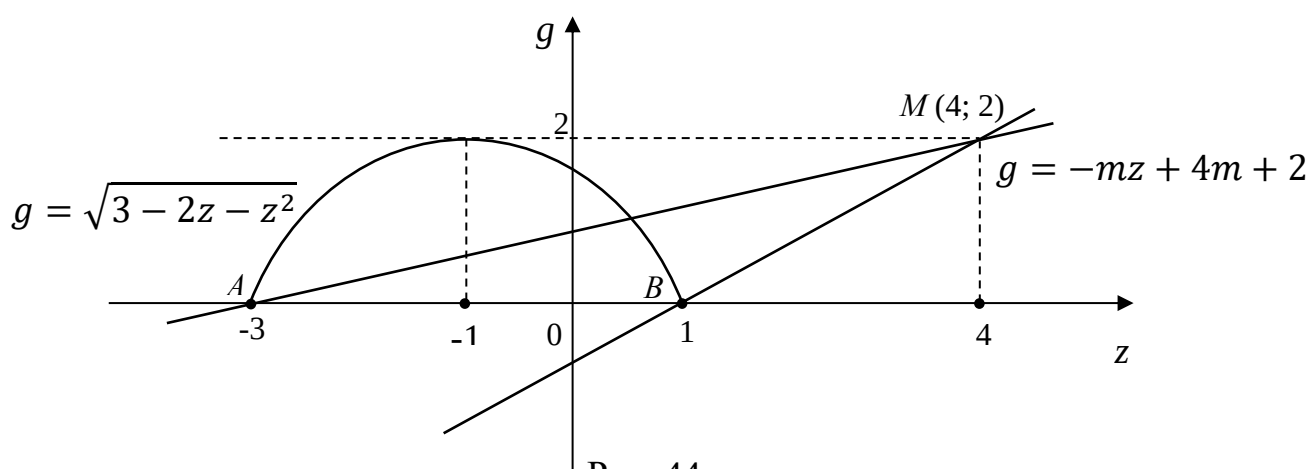


Рис. 44

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций имеют единственную общую точку. Обратимся к рис. 44.

1) Пусть $m = 0$.

$g = 2$ – касательная к графику $g = \sqrt{3 - 2z - z^2}$, следовательно, графики имеют единственную общую точку, а, значит, исходное уравнение имеет единственное решение.

2) Пусть $-m < 0$.

В этом случае прямая не имеет общих точек с окружностью, следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

3) Пусть $-m > 0$.

Прямая AM проходит через точки $M(4; 2)$, $A(-3; 0)$. Подставим координаты точки $A(-3; 0)$ в уравнение прямой: $0 = 3m + 4n + 2$; $-m = \frac{2}{7}$.

Если $0 < -m \leq \frac{2}{7}$, то исходное уравнение имеет два решения.

Прямая MB проходит через точки $M(4; 2)$, $B(1; 0)$. Подставим координаты точки $B(1; 0)$ в уравнение прямой: $0 = -m + 4n + 2$; $-m = \frac{2}{3}$.

Если $\frac{2}{7} < -m \leq \frac{2}{3}$, т.е. $-\frac{2}{3} \leq -m < -\frac{2}{7}$, то исходное уравнение имеет одно решение.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$.

Решение задания 10.

Преобразовав первое уравнение системы к виду $g - 2 = \sqrt{5 + 4z - z^2}$, $g \geq 2$, а затем к виду $(z - 2)^2 + (g - 2)^2 = 9$, замечаем, что графиком последнего уравнения является фиксированная полуокружность с центром в точке $(2; 2)$ и радиусом 3.

Выполнив преобразования второго уравнения системы, получим:

$$g - p = \sqrt{9 - (z - p)^2}, g \geq p,$$

$$(z - p)^2 + (g - p)^2 = 9.$$

$g \geq p$; $(z - p)^2 + (g - p)^2 = 3^2$ – уравнение полуокружности, меняющей положение в зависимости от p .

Обратимся к рис. 45.

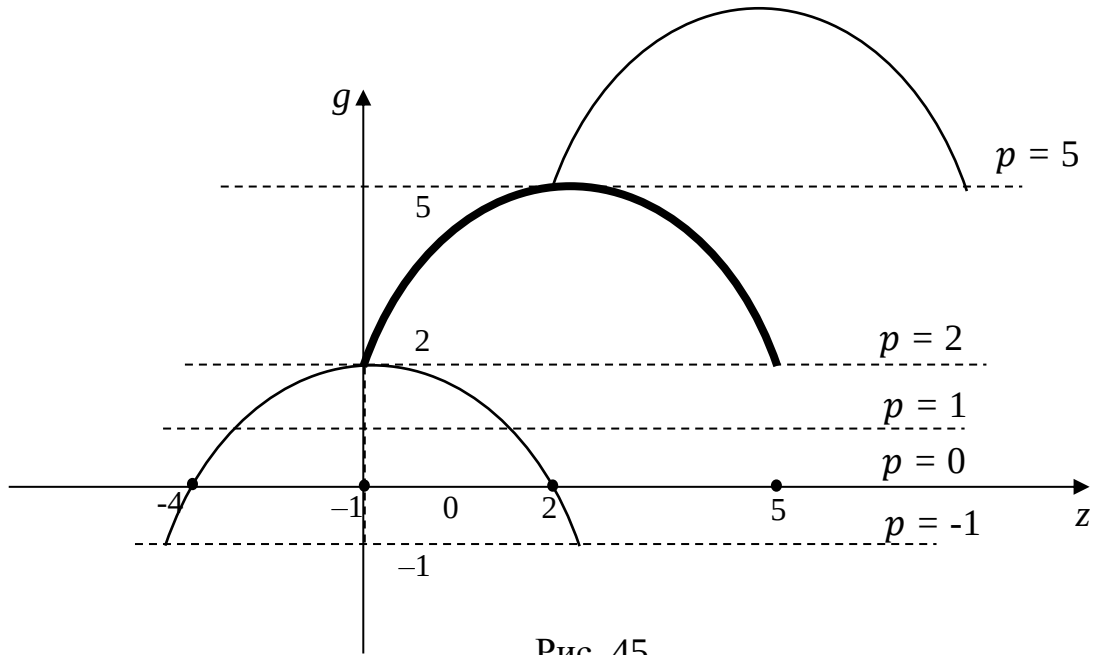


Рис. 45

Пусть $p = 0$; $z^2 + g^2 = 3^2$ – окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 3. При $p = 0$ система имеет одно решение.

Пусть $p > 0$.

$p = 1$ – система имеет одно решение;

$p = 2$ – бесконечное множество решений, т.к. полуокружности совпадают;

$p = 5$ – система имеет одно решение.

При $p > 5$ система решений не имеет.

Пусть $p < 0$.

$p = -1$ – система имеет одно решение;

$p = -2$ – система не имеет решений.

Ответ: $[-1; 2) \cup (2; 5]$.

Учебное издание

***Гончарова Маргарита Алексеевна,
Маколкина Татьяна Викторовна,
Решетникова Наталья Валерьевна***

Решение заданий с параметрами

Учебное пособие

Электронное издание.

Дата размещения: 25.08.2026 г.

Объем: 7 печ. л. Формат страниц: 60×84/16.

Гарнитура: Times New Roman.

Системные требования: устройство с поддержкой просмотра PDF/документов.

© Гончарова М.А., Т.В. Маколкина, Решетникова Н.В., 2026