Консультация с использованием
информационно-телекоммуникационных технологий

Введение

Наименование разработки	**Некоторые методы решения геометрических задач**
Целевая группа	*Учителя математики*
Область применения разработки	*Обеспечение выполнения плана мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2021 году*

1. Основания для разработки

Документ (документы), на основании которых выполняется работа	*План мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2021 году.* *План работы мобильной сети учителей математики Алтайского края*

2. Назначение разработки

Цель	*Содействие развитию профессиональной (предметной) компетентности учителей математики – формирование конкретных знаний, умений и навыков в области решения задач по планиметрии*

Некоторые методы решения геометрических задач

№	СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ	СОДЕРЖАНИЕ
1.	**Ключевые слова**	Дополнительные построения в геометрических фигурах. Метод опорного элемента, метод введения вспомогательного элемента или параметра, метод треугольника, метод подобия, метод ключевой задачи
2.	**Аннотация к содержанию консультации**	Содержание консультации раскрывает опыт работы учителя математики по формированию и развитию у обучающихся умений решать задачи по планиметрии в 7-9 классах
3.	**Запрос на консультирование**	Как научить учащихся решать задачи по планиметрии, используя различные методы

Некоторые методы решения геометрических задач по планиметрии

При подготовке к экзамену по математике большинство задач по планиметрии не решается с помощью строгих алгоритмов, почти каждая геометрическая задача требует своего подхода. Искусство решать задачи основывается на хорошем знании теории, на знании достаточного количества геометрических фактов и в овладении приёмами и методами решения. Эти методы обладают некоторыми особенностями: большое разнообразие, трудность формального описания, взаимозаменяемость, отсутствие чётких границ области применения.

При решении геометрических задач используются три основных метода:

• **геометрический,** когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

• **алгебраический,** когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

• **комбинированный,** когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

В данной работе большее внимание уделено методу дополнительных построений. Введение в решение задачи построения дополнительных линий на чертеже позволяет использовать и другие методы решения геометрических задач: метод опорного элемента, метод введения вспомогательного элемента или параметра, метод треугольника, метод подобия, метод ключевой задачи.

Суть **метода дополнительных построений** при решении геометрических задач: решение планиметрической задачи начинается с построения чертежа, аккуратное выполнение которого помогает найти связи между элементами фигуры и наметить дальнейшие действия. Дополнительные линии чаще всего проводятся для того, чтобы свести задачу к ранее решенной или просто более простой задаче. Они позволяют включить в задачу новые фигуры с их свойствами, тем самым увеличить число теорем, которые можно использовать при решении задачи. Метод дополнительных построений при решении геометрических задач является непростым, так как нужное дополнительное построение не всегда удается определить с первого взгляда. Но, зная различные способы дополнительных построений и их применение, решение геометрической задачи становится намного проще, так как появляются другие фигуры, свойства которых известны учащимся. Иногда условие задачи подсказывает выбор дополнительного построения. Однако увидеть нужное дополнительное построение могут далеко не все. Вместе с тем существуют достаточно типичные дополнительные построения, к выполнению которых учащихся (в подавляющем большинстве) можно подготовить.

1.1. Приёмы дополнительного построения

Приёмы дополнительного построения, которые используются при решении геометрических задач можно разделить на два вида – это разбиение фигур и дополнение.
Разбиение фигур:

- проведение в многоугольнике прямой, параллельной одной из имеющихся (или
- параллельных прямых), что позволяет применять подобие;
- разбиение фигуры на части с целью получения треугольника и параллелограмма (в том числе ромба, квадрата), что позволяет применять свойства этих фигур;
- проведение перпендикуляров, радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции позволяют получить прямоугольные треугольники.

Дополнение фигур:

- построение параллелограмма, с помощью продления медианы треугольника, что позволяет применять свойства параллелограмма;
- построение дополнительного треугольника;
- построение вспомогательной окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов, связанных с окружностью.

Рассмотрим дополнительные построения, использование которых целесообразно при решении планиметрических задач, связанных с треугольниками и четырёхугольниками.

1.2. Разбиение фигур

1.2.1. Построение прямой параллельной одной из имеющихся (или параллельных прямых)

Если в треугольнике известен отрезок AA_1, то через точку A_1 проводится прямая, параллельная стороне АВ, до её пересечения со стороной АС (рис.1). По теореме о пропорциональных отрезках получаем CA_2 / CA_1= A_2A / A_1B. Если отрезок AA_1 является медианой, то по теореме Фалеса A_2 – середина стороны АС.

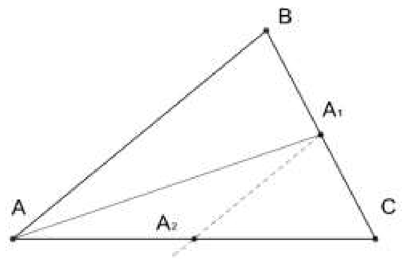


Рис.1

Если в треугольнике известны два отрезка, проведённые из разных вершин, в том числе биссектриса, высота, или медиана, то через основание одного из них проводится прямая, параллельная данному отрезку, до её пересечения со стороной треугольника (рис. 2, рис.3).

Так на рис. 2 прямая KB_2 отсекает от треугольника $A\ A_1\ A_2$ подобный ему треугольник AKB_2, а прямая $A_1\ A_2$ – треугольник $CA_1\ A_2$, подобный треугольнику CBB_2.

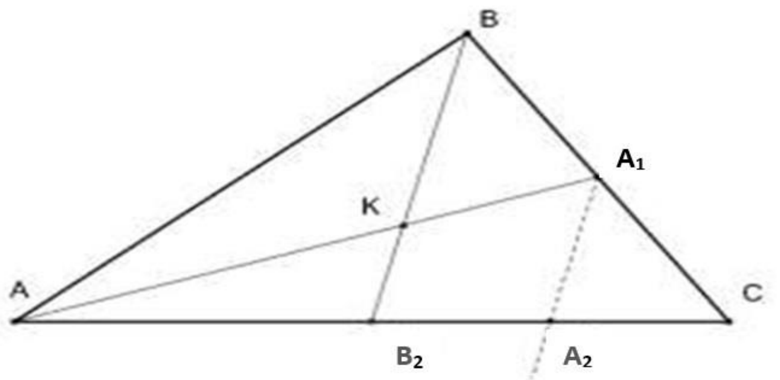


Рис.2

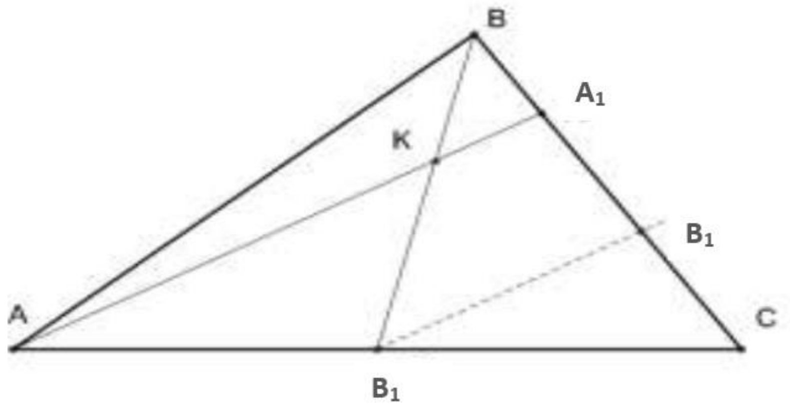


Рис. 3

1.2.2. Разбиение фигуры на части для получения треугольника и параллелограмма

Если в треугольнике (рис. 4), параллелограмме (рис. 5) или трапеции (рис. 6, рис. 7) дана биссектриса одного из внутренних углов, то можно построить ромб, две стороны которого лежат на сторонах данного треугольника или четырехугольника, а биссектриса является диагональю. Такое построение позволяет использовать свойства этих фигур.

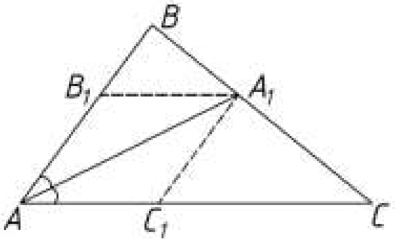


Рис. 4

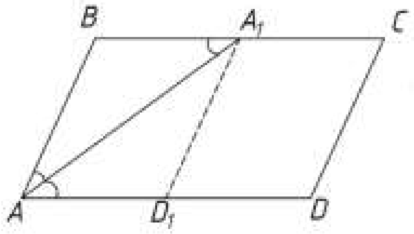


Рис. 5

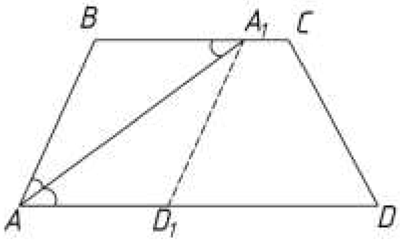


Рис. 6

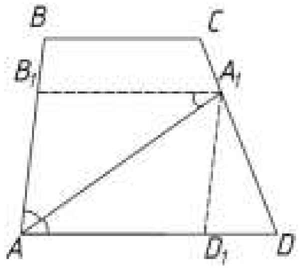


Рис. 7

1.2.3. Проведение перпендикуляров.

Проведённые перпендикуляры позволяют получить прямоугольные треугольники и использовать теорему Пифагора, теоремы о подобии треугольников.

Часто в задачах используются такие дополнительные построения как проведение радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции.

1.3. Дополнение фигур

1.3.1. Удвоение медианы

Так, если в условии задачи известна медиана треугольника, то удвоив её, мы получим параллелограмм (рис.8), что позволит использовать его свойства.
В зависимости от содержания задачи такое дополнительное построение можно выполнять и для двух, и для трёх медиан; использовать не весь параллелограмм, а только его части Например, треугольник AA_2C (рис. 8).

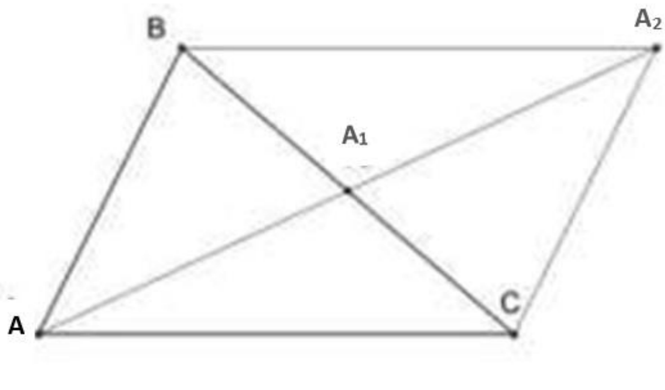


Рис.8

1.3.2. Дополнительное построение треугольника

В результате построения, выполненного на рис. 9 ($AB_2 \parallel BC$) и рис. 10 ($AC \parallel BA_2$), появляются две пары подобных треугольников. Так, на рисунке 9: ΔAKB_2 и ΔA_1KB; ΔAB_1B_2 и ΔCB_1B; на рис. 10: ΔAKB_1 и ΔA_2KB; ΔAA_1C и ΔA_2A_1B подобны.

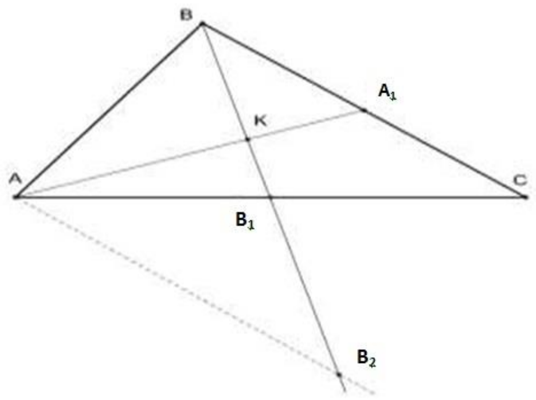


Рис.9

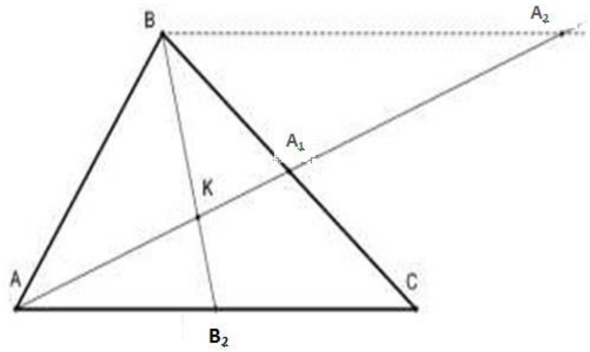


Рис.10

1.3.3. Если даны две окружности разных радиусов (не имеющие общих точек, пересекающиеся в двух точках или касающиеся внешним образом) с секущей, проходящей через одну из точек пересечения окружностей (или общей касательной), то через центр меньшей окружности проводится прямая, параллельная данной секущей (или касательной). Находится точка пересечения с радиусом большей окружности, проведённым в точку касания, или с его продолжением (рис. 11, рис. 13, рис. 12, рис.14).

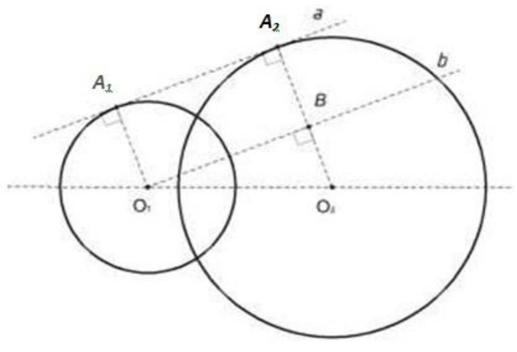


Рис.11

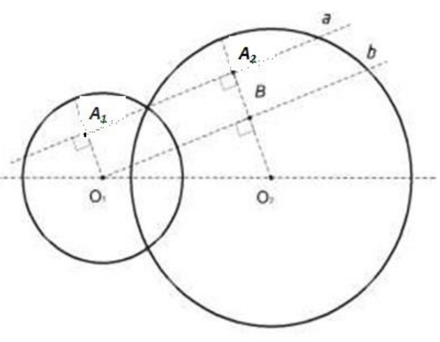


Рис.12

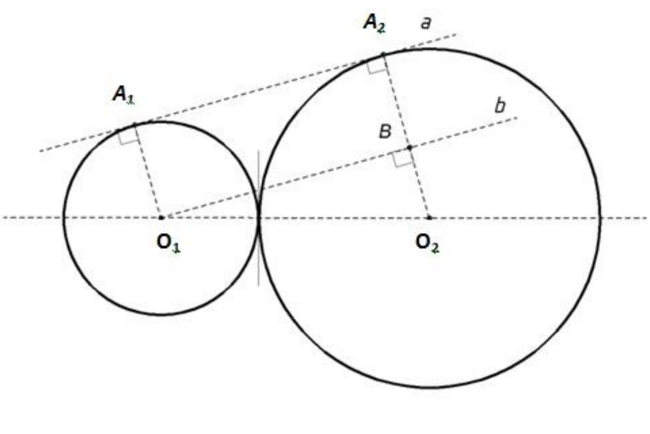


Рис. 13

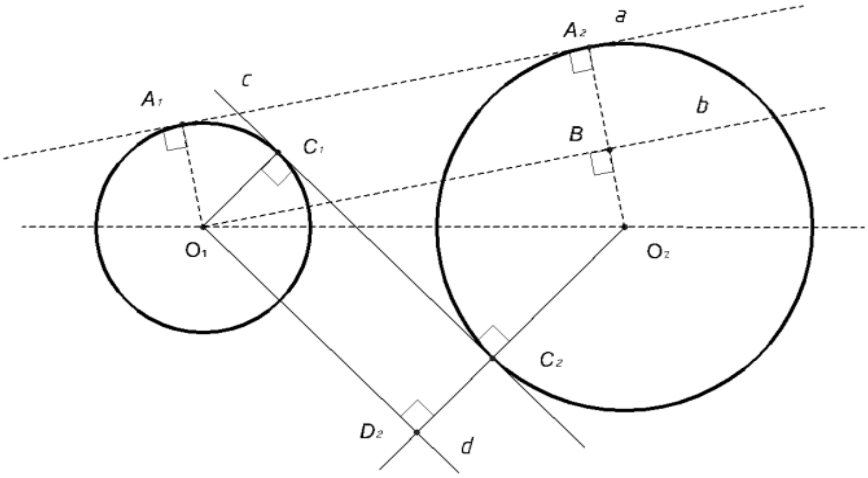


Рис. 14

Результатом этих дополнительных построений является прямоугольный треугольник. В треугольнике вершины острых углов совпадают с центрами данных окружностей, один из катетов равен половине отрезка секущей, расположенного внутри окружностей (или отрезку касательной, заключенному между точками касания), а другой сумме (для случая с внутренней касательной) или - разности (для случая с внешней касательной) радиусов этих окружностей. В случае касания данных окружностей гипотенуза O_1O_2 ΔO_1O_2B равна сумме радиусов этих окружностей (r_1 и r_2), поэтому расстояния между точками касания окружностей с их общей внешней касательной можно найти по формуле:

$$A_1A_2 = \sqrt{r_1} r_2$$

1.3.4. Прямоугольный треугольник достраивается до равнобедренного треугольника (рис.15).

Один из катетов данного треугольника становится, медианой, биссектрисой и высотой, а другой – половиной основания.

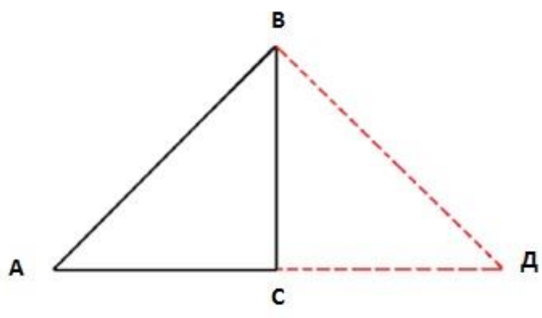


Рис.15

1.3.5. Если в треугольнике, параллелограмме или трапеции дана биссектриса одного из внутренних углов, то проводится дополнительное построение треугольника, одна из сторон которого содержит эту биссектрису, вторая совпадает со стороной данной фигуры, а третья или параллельна другой стороне этой фигуры, или получается при ее продолжении (рис. 17-20). Построенный треугольник является равнобедренным.

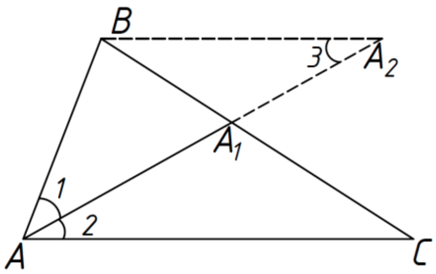


Рис. 17

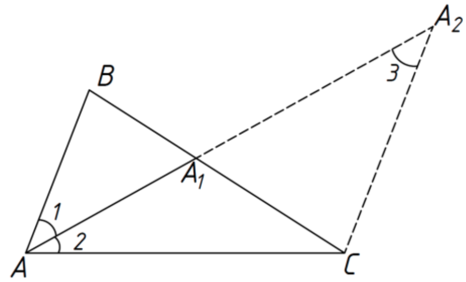


Рис. 18

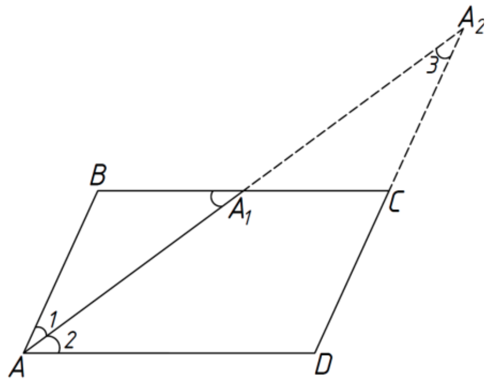


Рис. 19

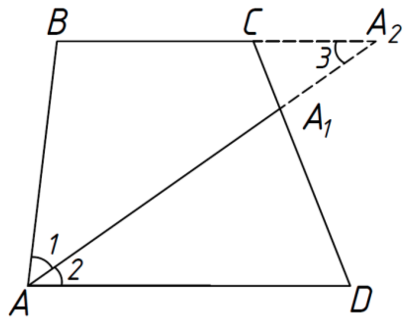


Рис. 20

1.3.5. Дополнительные построения в трапеции:

- проведение высот из концов одного основания на другое;
- через вершину меньшего основания провести отрезок параллельно второй диагонали. Это позволяет получить параллелограмм и треугольник.

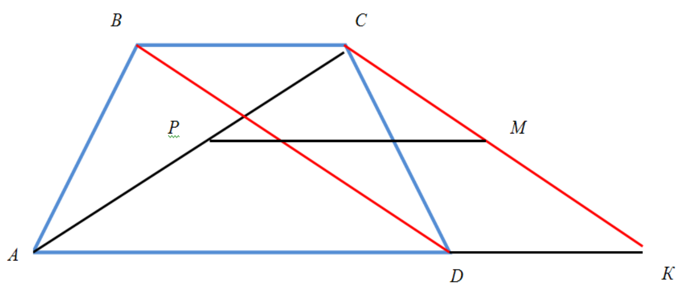


Рис.21

При этом площадь полученного треугольника равна площади трапеции. Доказательство этого факта можно предложить школьникам как задачу.

- проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину. При этом получаем параллелограмм и треугольник.

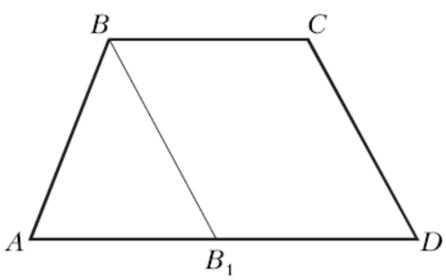


Рис.22

– проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам.

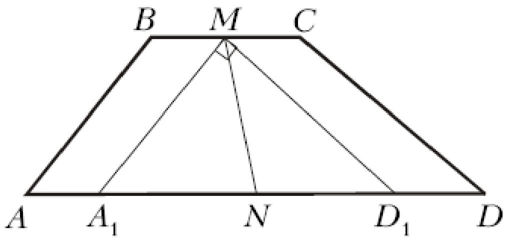


Рис.23

– продление боковых сторон до пересечения.

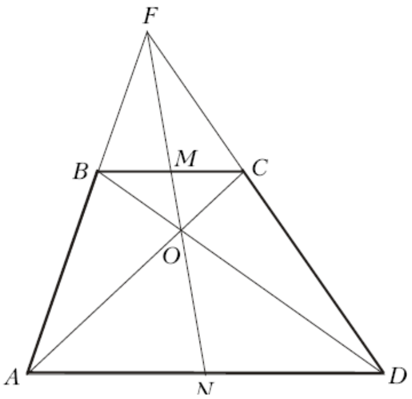


Рис.24

При этом прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

Доказательство этого факта можно предложить школьникам как задачу.

1.3.6. Построение дополнительной окружности

Если дан прямоугольный треугольник, то вокруг него описывается окружность, центром которой является середина гипотенузы.

Если дан четырехугольник, у которого суммы противоположных углов равны, то вокруг него описывается окружность. Признаком существования для четырехугольника описанной окружности обладают квадрат, прямоугольник и равнобедренная трапеция.

Если дан четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Если даны две окружности с общей внешней касательной, касающиеся друг друга внешним образом, то целесообразно рассмотреть треугольник, вершинами которого служат три точки касания данных фигур (рис.25).

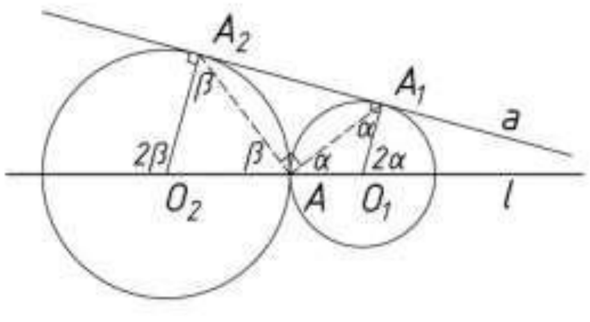


Рис.25

Треугольник A_1AA_2 является прямоугольным с прямым углом А (А – точка касания окружностей). Доказательство:

ΔO_1AA_1 и ΔO_2AA_2 – равнобедренные. Пусть α и β углы при основаниях этих треугольников; тогда 2α – внешний угол при вершине О1, 2β – внешний угол при вершине О2. $\angle 180^0$- 2α и $\angle 180^0$- 2β - односторонние углы при $O_1 A_1 \parallel O_2 A_2$ (две прямые, перпендикулярные третьей параллельны между собой) и секущей $O_1 O_2$, значит, 2α + 2β = 180° (по свойству параллельных прямых), поэтому α + β =90°. $\angle A_1AA_2 = 180° – (\angle A_1AO_1 + \angle A_2 AO_2) = 180° – (\alpha + \beta) = 180° – 90° = 90^0$, что и требовалось доказать.

Вспомогательные окружности часто облегчают вычисление углов в задачах о "некруглых" фигурах.

Теорема 1(условие принадлежности четырех точек окружности).

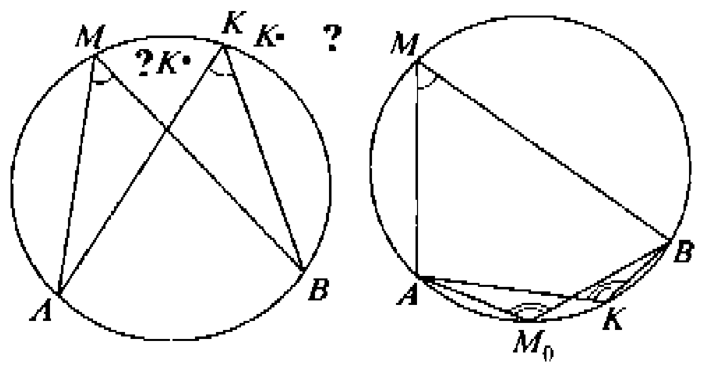


Рис.26

Если для четырех точек плоскости А, В, М, К выполняется одно из следующих условий:

а) точки М и К расположены по одну сторону от прямой АВ и при этом угол АМВ равен углу АКВ, то точки А, В, М и К лежат на одной окружности

б) точки М и К расположены по разные стороны от прямой АВ и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180^0$, то точки А, В, М и К лежат на одной окружности

Особенно важную роль играет частный случай.

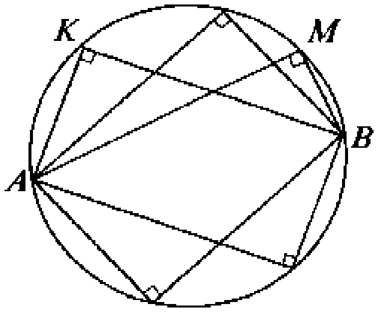
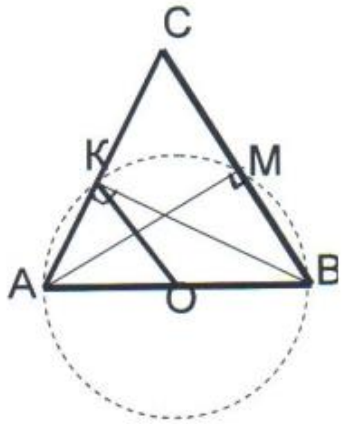


Рис.27

Теорема 2. Если $\angle AMB = \angle AKB = 90^0$, то точки А, В, М, К расположены на окружности с диаметром АВ (здесь два случая слились в один: точки М и К могут располагаться как по одну, так и по разные стороны от прямой АВ).

Т1 и Т2 и свойства вписанных углов позволяют решать некоторые интересные геометрические задачи с помощью вспомогательной окружности.

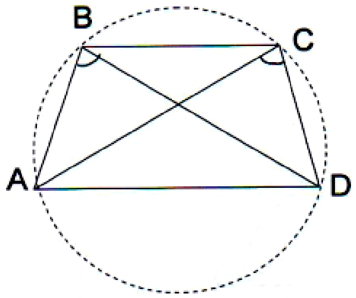
Задача 1. В треугольнике АВС проведена высота ВК. Найти длину отрезка, соединяющего точку К с серединой АВ, если АВ = 10 см.



Решение: проведем высоту АМ, тогда углы АКВ и АМВ равны по 90^0, значит точки А, К, М, В лежат на одной окружности и АВ – диаметр. Точка О – середина АВ по условию. Следовательно, АО = ОВ = КО = r = 5 см.

Ответ: 5см.

Задача 2. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC угол ABD равен углу ACD. Доказать, что ABCD – равнобедренная трапеция.



Решение:
Точки B и C лежат по одну сторону от AD и углы $\angle ABD = \angle ACD$, то точки A, B, C, D лежат на окружности. Так как хорды BC $\parallel$ AD, то дуга AB равна дуге CD. Поскольку равные дуги стягивают равны хорды, то AB = CD.

Дополнительные построения встречаются по всему курсу планиметрии с 7 по 9 классы. В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна имеется теоретический материал и задачный материал, при доказательстве, решении которого применяются различные дополнительные построения. А именно в темах: «Треугольники», «Параллельные прямые», «Соотношения между сторонами и углами треугольника», «Четырехугольники», «Площадь», «Подобные треугольники», «Окружность». При этом общее представление о разновидностях дополнительных построений при решении геометрических задач у школьников формируется стихийно. Сейчас в школьном курсе учеников знакомят с разнообразными понятиями и средствами решения задач, но именно их разнообразие оставляет мало времени на приобретение навыков, и вкус к такого рода задачам, которые развивают геометрическое воображение. Чтобы этот процесс сделать целенаправленным, на мой взгляд, в первую очередь необходимо систематизировать разновидности дополнительных построений. При изучении планиметрии в 7-8 классах особое внимание нужно уделять построению отрезков (соединение отрезком каких-либо точек, лежащих на сторонах многоугольника, построение высот треугольника или четырехугольника, радиусов или хорд окружности, диагоналей многоугольника, продолжение отрезков до взаимного пересечения между собой и т.д.). В 7 классе можно начинать вводить метод дополнительного построения при изучении темы «Свойства равнобедренного треугольника», при доказательстве признаков параллельности прямых, а также теорем, обратных этим теоремам. Закрепить знакомство можно при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника, неравенства треугольника.

В 8 классе при изучении темы «Четырехугольники», «Площади», «Теорема Пифагора» можно ознакомить со следующими видами дополнительного построения.

1.Удвоение медианы треугольника с последующим достраиванием треугольника до параллелограмма.

2. Стандартные дополнительные построения в задачах на трапецию.

Метода опорного элемента

В ситуации, когда нарисовав рисунок фигуры и отметив на нем все данные величины, не удается найти требуемые в задаче отрезки или углы, может помочь использование метода опорного элемента – он является основным методом составления уравнений в геометрических задачах и заключается в следующем: один и тот же элемент (сторона, угол, площадь, радиус, средняя линия и т. д.) выражается через известные и неизвестные величины двумя разными способами, и полученные выражения приравниваются.

Метод введения вспомогательного элемента или параметра

1. **Вспомогательный отрезок**

Характеристика метода. Длину некоторого отрезка рассматриваемой в задаче фигуры полагают равной, например, x и затем находят искомую величину. При этом в одних случаях вспомогательная величина в процессе решения задачи «исчезает» (сокращается), а в других ее нужно определить через данные условия и поставить в полученное для искомой величины выражение.

2. **Вспомогательный треугольник**

Характеристика метода. При помощи некоторого дополнительного построения (продление отрезка, геометрическое преобразование и др.) получают треугольник, который дает возможность получить решение задачи. Обычно такой треугольник обладает двумя важными для решения задачи свойствами:
1) его элементы некоторым образом связаны с элементами, фигурирующими в условии задачи;
2) для его элементов легче найти характеристики, позволяющие получить решение, чем для фигур непосредственно заданных условием.

Метод подобия

Этот метод применяется в задачах на построение, на доказательство утверждений, а также на определение длин пропорциональных отрезков с помощью свойств подобных треугольников.
В задачах используются свойства подобных треугольников:

- пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике (высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой; катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключённым между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла)
- пропорциональные отрезки окружности (свойство пересекающихся хорд, свойство двух секущих, свойство секущей и касательной).
- теорема о четырёх точках трапеции (середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой).

Метод ключевых задач

Метод составления системы задач, построенный по принципу – каждая задача системы использует результат решения одной какой-либо опорной (базисной) задачи, называется методом ключевой задачи.

Существует две точки зрения на понятие ключевой задачи. Первая из них состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-факта. Зачастую такая ключевая задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса. Вторая точка зрения состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-метода. При изучении какой-либо темы школьного курса можно отобрать определенный минимум задач, овладев методами решения, которыми учащиеся будут в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований по изучаемой теме.

Например, по теме «Треугольник» ключевыми являются:

- задача о параллельных прямых, пересекающих стороны угла,
- задача о медиане, проведенной к гипотенузе (в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы),
- задача об отношении площадей треугольников, имеющих общую высоту (основание),
- задача о свойстве биссектрисы угла треугольника,
- задача об отношении площадей подобных треугольников.

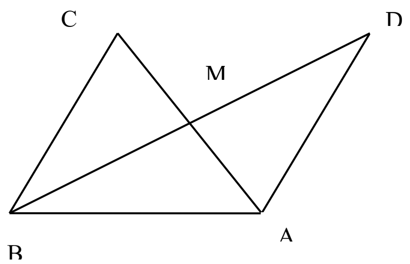
Ключевые задачи:

1. Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.
2. Медиана делит треугольник на два равновеликих.
3. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.
4. В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна ее половине.
5. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.
6. Если в треугольнике длина медианы равна половине длины стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный.
7. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам.

Практическое применение методов решения задач

Далее приведены задачи для учащихся 8 класса, решение которых позволяет проиллюстрировать применение метода дополнительных построений.

Задача 1. В треугольнике АВС медиана ВМ в два раза меньше стороны АВ и образует с ней угол 40^0. Найдите угол АВС.



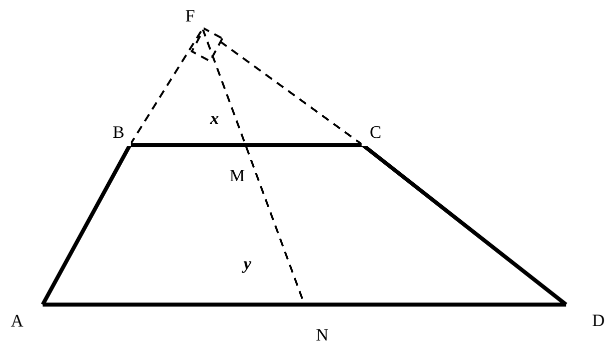
Решение:

Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D. Так как AB = 2BM, то AB = BD, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно,
$\angle BAD = \angle BDA = \left(180^0 - 40^0\right) : 2 = 70^0$.

Четырёхугольник ABCD является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $\angle CBD = \angle ADB = 70^0$.
Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 110^0$.

Ответ: 110^0.

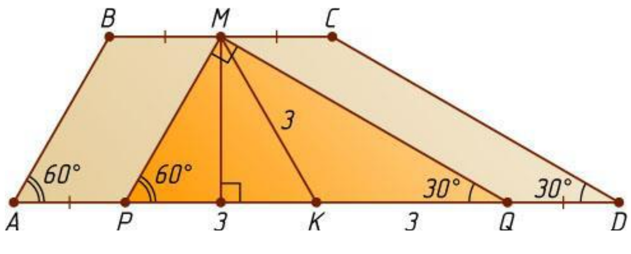
Задача 2. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40^0 и 50^0. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.



Решение:
1. Пусть BC=x, AD=y, то BM=MC=x/2, AN=ND=y/2.
2. Продолжим прямые AB и DC до пересечения в точке F.
   И заметим, что угол $AFD=180^0-50^0-40^0=90^0$.
3. Следовательно, FM=x/2 (по свойству медиан из прямого угла), FN =x/2.
4. Получаем два уравнения: MN=y/2-x/2=1. И (y+x)/2=4 (по теореме о средней линии трапеции).
5. Получаем x=3, y=5.

Ответ: 3 и 5.

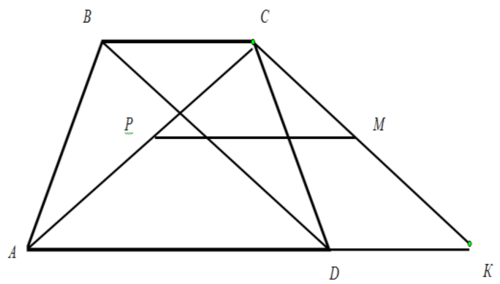
Задача 3, Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании равны 30^0 и 60^0. Найдите высоту трапеции.



Решение. Через середину M меньшего основания BC трапеции ABCD проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P и прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с прямой AD в точке Q.

Если K —середина AD, то PK = AK − AP = AK − BM = DK − MC = DK − QD = KQ. Поэтому MK — медиана треугольника PMQ, а так как ∠PMQ = $180^0 - 60^0 - 30^0 = 90^0$, то PK = KQ = MK = 3. Если ∠A = 60^0, то ∠MPK = 60^0. Поэтому треугольник PMK — равносторонний, его высота равна $3\sqrt{3}/2$. Следовательно, высота трапеции равна $3\sqrt{3}/2$
Ответ:

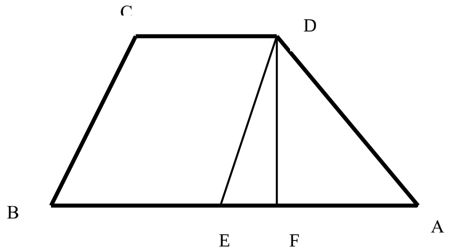
Задача 4. Найти среднюю линию трапеции, диагонали которой перпендикулярны и равны 6 и 8.



Дано: ABCD - трапеция. AC=6, CD= 8.
Найти: среднюю линию трапеции.
Решение:
1. Через вершину *C* меньшего основания трапеции *ABCD* проведём прямую, параллельную диагонали *BD*. Пусть *K* — точка пересечения этой прямой с прямой *AD.*
2. Рассмотрим треугольник АСК – прямоугольный, т.к. по условию задачи диагонали трапеции перпендикулярны.
3. По теореме Пифагора $AK = \sqrt{AC^2 + CR^2}$, $AK = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
4. Средняя линия треугольника PM= 10:2=5.
5. Средняя линия треугольника АСК равна средней линии трапеции (основание АК треугольника равно сумме оснований трапеции).

Ответ: 5.

Задача 5. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные - 17 и 25.



Решение:
1. В трапеции *ABCD* проведем DE ‖BC, тогда AE=AB-CD=44-16=28, DE=BC=17.
2. Пусть DF- высота трапеции. Пусть AF= ***x***, тогда EF = 28 - ***x***

Найдем высоту DF из треугольников ADF и EDF

$DF^2 = AD^2 - AF^2 = DF^2 - EF^2$.

3. Получили: $25^2 - \boldsymbol{x}^2 = 17^2 - (28 - \boldsymbol{x})^2$, x=20, DF=15.

4. По формуле площади трапеции $S_{ABCD} = (AB+CD)/2 \cdot DF = (44+16)/2 \cdot 15 = 450$.
Ответ: 450.

Список литературы и других источников по теме	1) Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: элективный курс для учащихся 9-11 классов. М.:МЦНМО. 2016 2) Зеленяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Киев, Москва, ДиаСфтюП, ДМК Пресс. 3) https://4ege.ru/– Сайт подготовки к ЕГЭ и ОГЭ. 4) https://ege.sdamgia.ru– Сайт "Решу ЕГЭ".
Автор-составитель	Шорохова Ольга Михайловна, учитель математики МБОУ «Первомайская СОШ» Павловского района Алтайского края