УДК 372.8:51

Коржевина Елена Константиновна
Матыцина Татьяна Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент
Марголина Наталия Львовна
кандидат физико-математических наук, доцент
Костромской государственный университет
elena.korzhevina@gmail.com, tnmatytsina@yandex.ru, nmargolina@yandex.ru

ОБ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ

Умение решать квадратные уравнения быстро и рационально необходимо при выполнении различных заданий, предусмотренных школьной программой, а также является актуальным в условиях нехватки времени на Едином государственном экзамене. В статье обсуждаются пути обучения школьников и студентов – будущих учителей математики способам решения квадратных уравнений без использования формулы корней, приводятся примеры.

Ключевые слова: *учащиеся, обучение, учебное задание, квадратное уравнение, метод переброски, теорема Виета.*

Содержание и предметные результаты по математике основного общего образования предполагают, что школьники должны уметь решать квадратные уравнения, выделяя полный квадрат, применяя формулу корней и используя теорему Виета. На практике оказывается, что старшеклассники охотнее всего решают квадратные уравнения «через дискриминант», то есть применяют формулу корней. Опыт работы экспертом единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике показывает (см. [3]), что при решении квадратных уравнений учащимися совершается огромное количество вычислительных ошибок, описок «по-невнимательности». Основные ошибки и анализ результатов проверки заданий с развернутым ответом подробно описан в работах [4; 5] и [6]. Умение быстро найти решение квадратного уравнения особенно важно при решении сложных задач, так как громоздкие выкладки и вычисления отвлекают учеников от основной линии решения. Разумеется, выпускник школы не может овладеть всем разнообразием методов и приемов решения уравнений, если таковыми не владеет его учитель. Поэтому при обучении студентов направления подготовки «Педагогическое образование» направленности «Математика» авторы статьи уделили внимание малоизвестному среди современных школьников методу. Авторы статьи уверены, что будущим учителям математики необходимо знать данный метод и уметь применять его на практике при решении уравнений и неравенств различного уровня сложности.

Все полные квадратные уравнения, корни которых являются рациональными (в частности, целыми) числами можно решать без использования формулы корней, причем это оказывается удобнее и обеспечивают заметный выигрыш во времени, что особенно важно на экзамене или контрольной работе.

Решение полных квадратных уравнений без использования формулы корней основано на следующих теоремах:

Теорема 1. Если для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется условие $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема 2. Если для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ выполняется условие $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Теорема 3. (теорема Виета для приведенного квадратного уравнения прямая и обратная).

Числа x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.

Если неприведенное квадратное уравнение нельзя решить по теоремам 1 или 2, то есть способ замены исходного уравнения приведенным. Этот способ называется «методом переброски» и основан на методе сведения исходного рационального уравнения к уравнению со старшим коэффициентом, равным единице.

Пусть $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ – рациональное уравнение с ненулевым старшим коэффициентом $a_n \neq 0$. Умножим это уравнение на $(a_n)^{n-1}$:

$$(a_n)^n x^n + a_{n-1}(a_n)^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 (a_n)^{n-1} x + a_0 (a_n)^{n-1} = 0.$$

Введем новую переменную $y = a_n x$. Относительно этой переменной уравнение примет вид

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 (a_n)^{n-2} y + a_0 (a_n)^{n-1} = 0.$$

Полученное уравнение имеет не более n корней. Все рациональные корни y_i такого уравнения являются целыми числами и делителями свободного члена. Корни x_i исходного уравнения получаются по формуле $x_i = \frac{y_i}{a_n}$.

Применим этот прием для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Умножая уравнение на a (так как $n = 2$), получим $a^2x^2 + abx + ac = 0$. Введем новую переменную $y = ax$ и решаем приведенное квадратное уравнение $y^2 + by + ac = 0$.

Если y_1 и y_2 – его корни, то корни исходного уравнения получим по формулам $x_1 = \frac{y_1}{a}$, $x_2 = \frac{y_2}{a}$.

Школьникам необязательно знать подоплеку этого метода, достаточно владеть алгоритмом решения. Однако качественно подготовленный учитель математики должен понимать все вышеизложенные выкладки, приводящие к следующему алгоритму:

1. Пусть $ax^2 + bx + c = 0$ исходное уравнение, $a \neq 1$. «Перебросим» коэффициент a к свободному члену.

2. Уравнение примет вид $y^2 + by + ac = 0$. Решаем его с использованием теорем 1 или 2, или теоремы Виета. Находим корни y_1 и y_2.

3. Находим значения $x_1 = \frac{y_1}{a}$, $x_2 = \frac{y_2}{a}$.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 9x + 9 = 0$.

Решение. Устно проверяем, что теоремы 1, 2 неприменимы, поэтому «перебросим» старший коэффициент к свободному члену. Уравнение $y^2 - 9y + 18 = 0$ решаем по теореме Виета, получаем $y_1 = 6$, $y_2 = 3$, значит $x_1 = \frac{6}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: 3; 1,5.

Пример 2. Решить уравнение $7x^2 + 15x + 2 = 0$.

Решение. Вместо этого уравнения решаем следующее: $y^2 + 15y + 14 = 0$. По теореме 2 (1+14 = 15) получаем $y_1 = -1$, $y_2 = -14$, тогда $x_1 = -\frac{1}{7}$, $x_2 = -\frac{14}{7}$.

Ответ: $-\frac{1}{7}$; –2.

К решению квадратных уравнений сводятся тригонометрические, показательные, логарифмические уравнения, уравнения высших степеней, текстовые задачи. При решении неравенств всех типов возникает необходимость разложения квадратных трехчленов на множители, что предполагает решение квадратных уравнений. Анализ заданий, предлагаемых во второй части единого государственного экзамена по математике показывает, что подавляющее большинство квадратных уравнений, встречающихся в них, может быть решено рассмотренными методами. Ниже приводятся несколько примеров задания [1; 2].

Пример 3. Решить уравнение

$$(2x^2 - 5x - 12)(2\cos x + 1) = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned} &2x^2 - 5x - 12 = 0, \\ &2\cos x + 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

К первому уравнению совокупности применяем метод переброски:

$$y^2 - 5y - 24 = 0.$$

Корни этого уравнения $y_1 = 8$ и $y_2 = -3$ легко находятся по теореме Виета. Тогда исходное уравнение имеет корни $x_1 = 4$ и $x_2 = -1{,}5$.

Второе уравнение имеет решения $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: 4; –1,5; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решить неравенство $2 \cdot 16^{-x} - 17 \cdot 4^{-x} + 8 \leq 0$.

Решение. После замены переменной $4^{-x} = t$, $t > 0$ неравенство приобретает вид

$$2t^2 - 17t + 8 \leq 0.$$

Для разложения на множители его правой части нужно решить уравнение

$$2t^2 - 17t + 8 = 0.$$

«Перебросим» старший коэффициент

$$y^2 - 17t + 16 = 0.$$

По теореме 1 $y_1 = 1$ и $y_2 = 16$, значит $t_1 = 0{,}5$ и $t_2 = 8$.

$$2(t - 8)(t - 0{,}5) \leq 0.$$

Применив метод интервалов, получим $0{,}5 \leq t \leq 8$, откуда $-1{,}5 \leq x \leq 0{,}5$. Ответ: [–1,5; 0,5].

Авторами статьи для проверки эффективности вышеизложенных методик был проведен эксперимент. Были предложены следующие уравнения:

1. $11x^2 + 25x - 36 = 0$;
2. $10x^2 + 27x + 17 = 0$;
3. $9x^2 - 37x + 4 = 0$;
4. $2x^2 - 9x + 9 = 0$;
5. $10x^2 + 13x + 4 = 0$;
6. $4x^2 + 9x + 2 = 0$;
7. $3x^2 - 13x + 12 = 0$;
8. $345x^2 - 137x - 208 = 0$;
9. $3\sqrt{2}x^2 + \left(3 + \sqrt{2}\right)x + 1 = 0$.

Каждое из этих уравнений может быть решено без использования формулы корней квадратного уравнения; без громоздких вычислений; каждое решение уравнения почти устное.

Данная работа, требующая решения девяти уравнений школьного уровня сложности была предложена студентам направления подготовки «Педагогическое образование» направленности «Математика» первого и второго курсов. Студентов I и II группы (это студенты соответственно первого и второго курса) не предупреждали о проведении срезовой проверки. Студенты второкурсники принимали участие в работе методического семинара «Актуальные проблемы математического образования в школе и в ВУЗе» кафедры высшей математики института физико-математических и естественных наук Костромского государственного университета, на заседаниях которого обсуждались методические приемы обучения решению квадратных уравнений, а первокурсники пользовались только знаниями, полученными в школе.

Приведем результаты работы студентов I группы, в эксперименте участвовали 19 человек (см. таб. 1).

Результаты работы студентов II группы (в эксперименте участвовали 17 человек) приведены в таблице 2.

Можно заметить, что вторая группа, принимавшая участие в работе методического семинара, в подавляющем большинстве выполнила работу полностью или без одного задания; остальные до-

Таблица 1

Результаты распределения I группы

Выполнено заданий	9	8	7	6-5	4-3-2	0
Количество студентов	0	1	7	6	4	1
Процент выполнивших от общего числа студентов	0 %	5,3 %	36,8 %	31,6 %	21 %	5,3 %

Таблица 2

Результаты распределения II группы

Выполнено заданий	9	8	6–5	2
Количество студентов	7	5	3	2
Процент выполнивших от общего числа студентов	41,2 %	29,5 %	17,6 %	11,7 %

пустили ошибки, которые можно классифицировать так:

1) в теореме Виета не учтено условие $x_1 + x_2 = -b$, хотя оно и было выписано;

2) не увидели теорему 1 или теорему 2;

3) не вернулись к исходной переменной при использовании метода переброски.

Первая группа решала данные уравнения с использованием формулы корней, не применяя никаких приемов, упрощающих вычисления. Стоит отметить, что время, затраченное на работу, было в среднем в полтора раза больше, чем во второй группе. Также можно выделить следующие проблемы:

1) ошибки в написании формул корней;

2) сложности при вычислениях, особенно при извлечении квадратных корней;

3) работа с выражениями вида $a + b\sqrt{c}$.

Результаты эксперимента позволяют сделать однозначный вывод о повышении эффективности обучения при отработке способов решения квадратных уравнений без использования формулы корней.

Таким образом, при подготовке будущих учителей математики важную роль играет участие студентов в научных и методических мероприятиях, проводимых выпускающей кафедрой.

Библиографический список

1. ЕГЭ: Математика: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Национальное образование», 2015. – 272 с.

2. ЕГЭ: Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Национальное образование», 2016. – 256 с.

3. *Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н.* Особенности подготовки экспертов по проверке заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 3. – С. 177–178.

4. *Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н.* Анализ результатов проверки заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике за 2015 год // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. – 2016. – № 2. – С. 14–16.

5. *Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н.* Анализ структуры заданий единого государственного экзамена по математике за 2016 год по Костромской области // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2016. – № 4. – С. 34–37.

6. *Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е.* Об этапах математического образования в ВУЗе // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. – № 1. – С. 123–125.