Консультация с использованием
информационно-телекоммуникационных технологий

Введение

Наименование разработки	*Решение уравнений и неравенств с параметрами, а также их систем векторно-координатным методом*
Целевая группа	*Учителя математики краевых государственных (муниципальных) образовательных организаций, реализующих образовательные программы основного общего и среднего общего образования*
Область применения разработки	*Обеспечение реализации программ основного общего и среднего общего образования*

1. **Основания для разработки**

Документ (документы), на основании которых выполняется работа	

2. **Назначение разработки**

Цель	*Расширение у учителей математики краевых государственных (муниципальных) образовательных организаций, реализующих образовательные программы основного общего и среднего общего образования номенклатуры методов решения задач с параметрами.*

Решение уравнений и неравенств с параметрами, а также их систем векторно-координатным методом

№	СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ	СОДЕРЖАНИЕ
	Ключевые слова	Векторно-координатный метод; задача с параметром;
	Аннотация к содержанию консультации	В консультации рассматриваются: – теоретические положения, обеспечивающие применение векторно-координатного метода к решению задач с параметрами; – примеры решения задач; – методика обучения решению задач с параметрами векторно-координатным методом. Данная консультация позволит учителям математики освоить векторно-координатный метод для решения задач с параметрами, обеспечить более качественную подготовку выпускников к решению задач высокого уровня сложности.
	Запрос на консультирование	Как традиционно геометрический метод решения задач применяется при решении задач алгебраических.

Текст консультации

1. Зачем учителю массовой школы обучать решению задач с параметрами своих учащихся?

Отношение к задачам с параметрами в учительской среде массовой школы весьма однозначно. Тема традиционно считается трудной, поэтому очень многие учителя сознательно избегают решения задач с параметрами на уроках. Мотивируется это тем, что ни Федеральный компонент государственного стандарта общего образования, ни Требования к уровню подготовки выпускников (в том числе в старшей школе как на базовом, так и на профильном уровне), не содержат соответствующих пунктов.

Единицы учащихся, кто по их мнению имеет потребность в овладении решением задач такого уровня, найдут другую возможность освоить этот пласт задач (от самостоятельного изучения по учебным пособиям до онлайн-трасляций лекций или видеороликов решения задач в сети Интернет), а остальным это не надо, поэтому зачем тратить время.

С другой стороны, никто не оспаривает необходимость изучения решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$. И редко кто задумывается, что это задача с параметрами. Мало того, с тремя параметрами. Безусловно, на изучение вопроса решения квадратного уравнения в программе отводится значительное время, но тем не менее, школьники его успешно осваивают. В старшей школе примером задач с параметром, входящих в программный материал, является решение простейших тригонометрических уравнений (и неравенств).

Поэтому говорить, «зачем нам задачи с параметрами, мы работаем в простых классах», по крайней мере, не логично. В той или иной степени это программный материал, хотя и имеющий свою специфику.

Кроме того, наличие в спецификации КИМ ЕГЭ по математике в 2015 на профильном уровне в №20 проверяемых требований «Уметь решать уравнения и неравенства» на высоком уровне сложности предполагает решение задачи с параметром. Приемные комиссии ведущих ВУЗов указывают, что именно задачи № 20, 21 (С5, С6 по нумерации 2012-2014 гг.) являются для них определяющими при принятии решения о приеме абитуриента на обучение.

2. Зачем учителю владеть различными методами решения задач с параметрами?

Тематика задач с параметрами крайне разнообразна. Все учителя в какой-то мере знакомы с простейшими приемами их решения. Как правило, каждый класс задач имеет свой прием решения. В том числе, есть задания, содержащие определенные конструкции, которые позволяют решать их различными способами. Здесь встает вопрос об эффективности применения того или иного способа решения. Одним из критериев подготовленности учащегося к сдаче ЕГЭ по математике является умение учащегося «уложиться» в отведенное время. Это самый жесткий критерий, так как есть учащиеся, которые получили не самый высший из возможных для них баллов по причине того, что «не хватило времени», «не успели переписать задание». Экономия временны́х ресурсов – одно из преимуществ применения векторно-координатного метода. Проиллюстрируем это на примерах решения традиционных задач.

Пример 1. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, d имеет место неравенство $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

Доказательство:

Рассмотрим векторы $\vec{m}(a;b)$, $\vec{n}(c;d)$, тогда $|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\vec{n}|=\sqrt{c^2+d^2}$. Пусть $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$, тогда координаты вектора-суммы $\vec{p}(a+c;b+d)$, а длина вектора-суммы $|\vec{p}|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

По неравенству треугольника $|\vec{m}|$ + $|\vec{n}|$ $\ge$ $|\vec{m}+\vec{n}|$. Тогда

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Причем равенство достигается, когда векторы коллинеарны. ■

Пример 2. Докажите, что для любых действительных чисел справедливо неравенство: $\dfrac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

Доказательство:

Рассмотрим векторы $\vec{m}(x;y;z)$, $\vec{n}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Тогда $|\vec{m}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$|\vec{n}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, а $|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$,

а их скалярное произведение $\vec{m}\cdot\vec{n}=x\cdot\frac{1}{3}+y\cdot\frac{1}{3}+z\cdot\frac{1}{3}=\frac{x+y+z}{3}$.

Так как $\vec{m}\cdot\vec{n}\le|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|$, то $\dfrac{x+y+z}{3}\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$. ■

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y=26, \\ \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10 \end{cases}.$$

Решение:

Преобразуем второе уравнение системы:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(10-x)^2+(5-y)^2}=10$$

Рассмотрим векторы $\vec{m}(x-2;y+1)$, $\vec{n}(10-x;5-y)$ и $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$. Тогда $|\vec{m}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$, $|\vec{n}|=\sqrt{(10-x)^2+(5-y)^2}$, $\vec{p}(8;6)$ и $|\vec{p}|=\sqrt{8^2+6^2}=10$. Получили, что $\left|\vec{m}+\vec{n}\right| = \left|\vec{m}\right| + \left|\vec{n}\right|$, что по неравенству треугольника возможно только для коллинеарных векторов. Тогда координаты векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ пропорциональны. Например, $\frac{x-2}{8} = \frac{y+1}{6}$. Тогда $3(x-2) = 4(y+1)$. А система принимает вид: $\begin{cases} 3x+4y=26, \\ 3x-4y=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=2. \end{cases}$

Поскольку никаких условий на координаты векторов мы не накладывали, то необходимо осуществить проверку найденных значений.

Ответ: (6;2).

3. Какие методические приемы позволяют снять психологический барьер у учащихся перед необходимостью решить задачу с параметром?

Решим сначала такое уравнение:

Пример 4. $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2+100-12x-16y} = 10$.

Решение:

Преобразуем уравнение $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-12x+36+y^2-16y+64} = 10$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(6-x)^2+(8-y)^2} = 10$$

Рассмотрим векторы $\vec{m}(x;y)$, $\vec{n}(6-x;8-y)$ и $\vec{p} = \vec{m}+\vec{n}$. Тогда

$\left|\vec{m}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(6-x)^2+(8-y)^2}$, $\vec{p}(6;8)$ и $\left|\vec{p}\right| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$.

Получили, что $\left|\vec{m}+\vec{n}\right| = \left|\vec{m}\right| + \left|\vec{n}\right|$, что по неравенству треугольника возможно только для коллинеарных векторов. Более того, для сонаправленных векторов конец вектора $\vec{m}$ будет совпадать с началом вектора $\vec{n}$, то есть возможные значения для переменных x и y таковы: $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 8$. Тогда координаты векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ пропорциональны. Например, $\frac{x}{6} = \frac{y}{8}$. Откуда $y = \frac{4}{3}x$. Таким образом, уравнение имеет бесконечно много решений вида $\left(a; \frac{4}{3}a\right)$, где $a \in [0;6]$.

Ответ: $\left(a; \frac{4}{3}a\right)$, где $a \in [0;6]$.

Здесь впервые мы встречаемся с ПОТРЕБНОСТЬЮ в параметре. Учащиеся должны записать все решения уравнения. А для уравнения с двумя неизвестными они знают, что это должна быть пара значений. То есть мы должны придумать способ, как это сделать, если между значениями переменных есть связь. В этом состоит большой развивающий потенциал решения уравнений с двумя переменными.

Далее учащимся предлагается решить задачу

Пример 5. При каждом значении b решите уравнение:

$$\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+b^2+100-12x-16b}=10.$$

Ученики сначала «спотыкаются» о параметр, а потом говорят, что это такая же задача, как предыдущая! Только разница в том, что вместо второй равноправной переменной здесь участвует параметр.

Какие смысловые возможности дает такая последовательность задач? Учащиеся понимают, что

1) задача с параметром не так страшна, сколь о ней ходят легенды;
2) параметр имеет такую же природу, как и переменная:
   - для параметра существует ОДЗ;
   - конкретные допустимые значения параметра обращают «неопределенное» уравнение в «привычное» с одной переменной, то есть можно говорить о некоем соответствии между значением параметра и видом уравнения;

Решим эту задачу.

Преобразуем уравнение $\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{x^2+b^2+100-12x-16b}=10$

$$\sqrt{x^2+b^2}+\sqrt{(6-x)^2+(8-b)^2}=10.$$

Поскольку под каждым радикалом стоит сумма квадратов, то ОДЗ переменной x и ОДЗ параметра b одинаковы – $\mathbb{R}$.

Рассмотрим векторы $\vec{m}(x;b)$, $\vec{n}(6-x;8-b)$ и $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$. Тогда

$\left|\vec{m}\right|=\sqrt{x^2+b^2}$, $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{(6-x)^2+(8-b)^2}$, $\vec{p}(6;8)$ и $\left|\vec{p}\right|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Получили, что $\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\left|\vec{m}\right|+\left|\vec{n}\right|$, что по неравенству треугольника возможно только для коллинеарных векторов. Более того, для сонаправленных векторов конец вектора $\vec{m}$ будет совпадать с началом вектора $\vec{n}$, то есть: $0 \le x \le 6$, $0 \le b \le 8$. Тогда координаты векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ пропорциональны. Например, $\frac{x}{6}=\frac{b}{8}$. Откуда $x=\frac{3}{4}b$. Таким образом, уравнение имеет бесконечно много корней вида $\frac{3}{4}b$, где $b\in[0;8]$. При других значениях b корней нет.

Ответ: если $b\in[0;8]$, то $x=\frac{3}{4}b$;

если $b\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$, то корней нет.

4. Пример эффективного применения векторно-координатного метода для решения задач с параметрами из КИМов ЕГЭ.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-2a)^2}=|a|\sqrt{5},\\ y=ax+a^2-4\end{cases}$$ имеет более одного решения.

Решение:

Преобразуем уравнение системы:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(a-x)^2+(2a-y)^2}=|a|\sqrt{5}$$

Рассмотрим векторы $\vec{m}(x;y)$, $\vec{n}(a-x;2a-y)$ и $\vec{p}=\vec{m}+\vec{n}$. Тогда

$|\vec{m}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|\vec{n}|=\sqrt{(a-x)^2+(2a-y)^2}$, $\vec{p}(a;2a)$ и $|\vec{p}|=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5a^2}=|a|\sqrt{5}$.

То есть $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, тогда по неравенству треугольника векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ будут сонаправлены, причем $0\le x\le a$, $0\le y\le 2a$. Тогда координаты векторов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ пропорциональны. Пусть $\frac{x}{a}=\frac{y}{2a}$ и $a\ne 0$. Тогда $y=2x$.

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+4x^2}+\sqrt{(a-x)^2+(2a-2x)^2}=|a|\sqrt{5},\\ 2x=ax+a^2-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x|\sqrt{5}+|a-x|\sqrt{5}=|a|\sqrt{5},\\ (2-a)x=a^2-4\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x|+|a-x|=|a|\\ (2-a)x=a^2-4\end{cases}$$

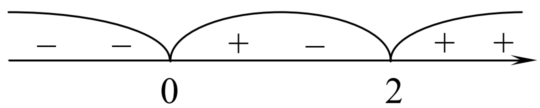
Второе уравнение системы является линейным, поэтому исследовать будем сначала его. Оно будет иметь более одного решения, если $\begin{cases}2-a=0,\\ a^2-4=0;\end{cases}$

То есть, если $a=2$.

Проверим это значение параметра для первого уравнения системы:

$$|x|+|2-x|=|2|,$$

$$|x|+|x-2|=2,$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0,\\ -x-x+2=2;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le 2,\\ x-x+2=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x+x-2=2;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0,\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}0<x\le 2,\\ 0\cdot x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x=2;\end{cases}\end{array}\right.$$ $0\le x\le 2$. То есть тоже более одного решения.

Получили, что система имеет более одного решения при $a=2$.

Ответ: 2.

5. Как провести рефлексию по решенным задачам с параметрами?

Учащиеся средних и старших классов, как правило, легко облекают эмоциональную рефлексию в словесные формы. Им вполне доступна и процессуальная (деятельностная) рефлексия. Однако, процесс решения трудных задач остро ставит вопрос организации на уроке интеллектуальной рефлексии.

По большому счету ученику надо осознать акты собственного теоретического мышления.

В концентрированном виде все сводится к ответу на глобальный вопрос: «как решить задачу, когда не знаешь, как решать».

Здесь возможно

1. демонстрировать учащимся решенные задачи, особенно из критериев к КИМам ЕГЭ, с целью «детализировать», сделать максимально подробным, «прозрачным» каждый этап решения;
2. демонстрировать учащимся собственные образцы ПОИСКА решения и попросить их сформулировать, построить структуру собственных логических связей готового решения;
3. дать задание построить аналогичную задачу с другими данными и сформулировать умственные операции, которые при этом пришлось выполнить;
4. дать список ключевых вопросов на осознание собственного знания:
   - Сформулируйте, с чего начался процесс решения задачи, какие действия пришлось совершать, как определить, что процесс решения закончен, как сформулирован результат.
   - Догадайтесь, с чего начать и что делать, чтобы получить именно требуемый результат.
   - Догадайтесь, какова должна быть формулировка задания, чтобы возможно было применить векторно-координатный метод?
   - Попытайтесь предсказать по исходным данным задачи, какое соотношение из векторно-координатного метода будет «рабочим», приведет к результату.
   - Какие признаки в формулировках задач позволяют «подозревать» эффективность применения векторно-координатного метода.
5. дать задание на формулировку личностного приращения в ходе успешного решения задачи с параметром.

Результатом такой работы может явиться план потенциально возможных действий и схем решения. Такой результат – это основа для мотивационного толчка «попробовать себя еще» при решении задач с параметрами.

Список литературы и других источников по теме	1. Рыжик В.И. 30000 уроков математики. М.: Просвещение, 2003.
Консультант	Ирина Владимировна Гриценко, учитель МБОУ СОШ № 114 г. Барнаула.