**Консультация с использованием**

**информационно-телекоммуникационных технологий**

**Введение**

|  |  |
| --- | --- |
| Наименование разработки | «Нахождение площади фигуры на клетчатой бумаге по формуле Пика» |
| Целевая группа | *Руководители методических объединений учителей математики, учителя математики* |
| Область применения разработки | *Обеспечение выполнения плана мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2020 году (Приказ АИРО им. А.М. Топорова от 28.02.2020 г. № 40)* |

1. **Основания для разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Документ (документы), на основании которых выполняется работа | *План мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2020 году (Приказ АИРО им. А.М. Топорова от 28.02.2020 г. № 40)*  *План работы мобильной сети учителей математики Алтайского края* |

1. **Назначение разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Цель | *Содействие развитию профессиональной (предметной) компетентности учителей математики – формирование конкретных знаний, умений и навыков в области решения задач на нахождение площади фигуры на клетчатой бумаге* |

**Решение текстовых задач и задач на работу (ЕГЭ, профиль)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ** | **СОДЕРЖАНИЕ** |
|  | **Ключевые слова** | Площадь фигуры, формула Пика |
|  | **Аннотация к содержанию консультации** | Содержание консультации раскрывает опыт работы учителя математики по формированию и развитию у обучающихся умений решать задачи на нахождение площади фигуры на клетчатой бумаге по формуле Пика. В консультации приведены различные примеры решений таких задач |
|  | **Запрос на консультирование** | Какие способы нахождения площади фигуры на клетчатой бумаге существуют? |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Текст консультации**    Многие ученики сталкиваются с задачами на нахождение площади треугольника, параллелограмма, многоугольника и других геометрических фигур по рисунку на клетчатой бумаге. Применяя правила и теоремы из геометрии, ученик может запутаться или забыть, да и к тому же уходит много времени на дополнительное построение, а в условиях экзамена дорога каждая минута. Чтобы не тратить много усилий, времени и не вспоминать впопыхах теоремы, аксиомы, правила, существует теорема Пика, с помощью которой можно без проблем и траты времени вычислить площадь фигуры, расположенной на клетчатой бумаге. Она секретной не является. Информация о ней в интернете имеется и многим материал данной консультации будет крайне полезен.  Об этой формуле я зачастую рассказываю школьникам применительно к нахождению площади треугольника. В консультации ее применение будет рассмотрено и для других фигур.  В задачах, которые будут на ОГЭ и ЕГЭ есть целая группа заданий, в которых дан многоугольник построенный на листе в клетку и стоит вопрос о нахождении его площади. Именно с этой формулой многие задачи решаются изящно и красиво. А кто же такой Пик? Приведем краткуюбиографическую справку.  **Краткая биографическая справка**  GeorgPick.png  **Георг Александр Пик (10.08.1859 – 13.07.1942)** – австрийский математик, родился в еврейской семье.  Георга, который был одарённым ребёнком, обучал отец, возглавлявший частный институт. В 16 лет Георг закончил школу и в 1875 году поступил в Венский университет. Уже в следующем году он опубликовал свою первую работу по математике, а ему было всего лишь семнадцать лет. Он изучал математику и физику, окончил его в 1879 г. В 20 лет он получил право преподавать оба эти предмета. В 1877 году из Дрезденской Высшей технической школы (Technische Hochschule) переехал Лео Кёнигсбергер, который занял кафедру в венском университете. Он стал руководителем Пика, и 16 апреля 1880 года под его руководством Пик защитил докторскую диссертацию «О классе абелевых интегралов». В 1881 году он получил место ассистента у Эрнста Маха, который занял кафедру физики в Пражском университете. Чтобы получить право чтения лекций, Георгу необходимо было пройти хабилитацию. Для этого он написал работу «Об интеграции гиперэпиллиптических дифференциалов логарифмами». Это произошло в 1882 году, вскоре после разделения пражского университета на чешский (Карлов университет) и немецкий (Университет Карла – Фердинанда). Пик остался в Немецком университете. В 1884 году Пик уехал в Лейпцигский университет к Феликсу Клейну. Там он познакомился с другим учеником Клейна, Давидом Гильбертом. Позже, в 1885 году, он вернулся в Прагу, где и прошла оставшаяся часть его научной карьеры.  В Немецком университете в Праге в 1888 году Пик получил место экстраординарного профессора математики, затем в 1892-м году стал ординарным профессором. В 1900 – 1901 годах занимал пост декана философского факультета.  В 1910 году Георг Пик был в комитете, созданном Немецким университетом Праги для рассмотрения вопроса о принятии Альберта Энштейна профессором в университет. Пик и физик Антон Лампа были главными инициаторами этого назначения, и благодаря их усилиям Энштейн, с которым Пик впоследствии сдружился, в 1911 году возглавил кафедру теоретической физики в Немецком университете. Пик и Энштейн имели не только общие научные интересы, но они оба страстно увлекались музыкой. Пик, игравший в квартете, который состоял из университетских профессоров, ввёл Энштейна в научное и музыкальное общества Праги.  Круг математических интересов Пика был чрезвычайно широк. В частности, им написаны работы в области функционального анализа и дифференциальной геометрии, эллиптических и абелевых функций, теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа, всего более 50 тем. С его именем связаны матрица Пика, интерполяция Пика — Неванлинны, лемма Шварца — Пика. Широкую известность получила открытая им в 1899 году [теорема Пика](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%9F%D0%B8%D0%BA%D0%B0) для расчёта площади многоугольника. В Германии эта теорема включена в школьные учебники.  После того как Пик вышел в отставку в 1927 году, он получил звание почётного профессора и вернулся в Вену — город, в котором он родился. Однако в 1938 году после аншлюса Австрии 12 марта он вернулся в Прагу. За десять лет до того, в 1928 году, Пик был избран членом-корреспондентом Чешской академии наук и искусств, но в 1939-м, когда нацисты заняли Прагу, он был исключён из академии.  13 июля 1942 года Пик был депортирован в созданный нацистами в северной Чехии лагерь Терезиенштадт, где умер две недели спустя в возрасте 82 лет.  Перейдем непосредственно к формуле Пика для расчёта площади многоугольника с вершинами в узлах клетки. В Германии эта теорема включена в школьные учебники. Широко известна она стала только лишь в 1969 году, после того, как Гуго Штейнгауз включил её в свою знаменитую книгу «Математический калейдоскоп». Однако, в нашей стране данная формула выходит за рамки школьной программы, и мало кому известна, хотя является универсальной и отличается своей простотой. Изучение данной темы расширяет интеллектуальный кругозор учащихся, а применение её упрощает нахождение площади геометрической фигуры, изображенной на клетчатой бумаге (сетке). Контрольно-измерительные материалы ЕГЭ содержат задания подобного типа, и их можно решить, применяя формулу Пика.  **Формулировка теоремы**:  S = В + Г / 2 − 1, где S — площадь многоугольника, В — количество целочисленных точек внутри многоугольника, а Г — количество целочисленных точек на границе многоугольника.  **Замечание**: формула справедлива только для многоугольников, у которых вершины расположены в узлах решетки.  Например, для многоугольника на рисунке, ***В=7*** (красные точки), ***Г=8*** (зелёные точки), поэтому ***S = 7 + 8/2 - 1 = 10*** квадратных единиц.  C:\Users\Колян\Downloads\670870_original.png  Для интересующихся математикой можно привести доказательство этой теоремы. Всех остальных учащихся достаточно научить правильно определять и вычислять внутренние точки (В) и граничные точки (Г).  Докажем теорему Пика:  • Рассмотрим прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях решетки. Пусть длины его сторон равны a и b. Имеем в этом случае В = (a–1)(b–1), Г = 2a+2b и, по формуле Пика, S = (a–1)(b–1)+a+b–1 = ab .  • Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с катетами, лежащими на осях координат. Такой треугольник получается из прямоугольника со сторонами a и b, рассмотренного в предыдущем случае, разрезанием его по диагонали. Пусть на диагонали лежат c целочисленных точек. Тогда для этого случая В = ((a–1)(b–1)–c+2)/2, Г = (2a+2b)/2+c–1 и получаем, что S = ab/2.  • Теперь рассмотрим произвольный треугольник. Его можно получить, отрезав от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников (см. рисунок).  C:\Users\Колян\Downloads\671203_original.jpg  Поскольку и для прямоугольника, и для прямоугольного треугольника формула Пика верна, мы получаем, что она будет справедлива и для произвольного треугольника.  • Остается сделать последний шаг: перейти от треугольников к многоугольникам. Любой многоугольник можно триангулировать, т.е. разбить на треугольники (например, диагоналями). Отсюда по индукции следует, что формула Пика верна для любого многоугольника, что и требовалось доказать.  К сожалению, эта простая и красивая формула плохо обобщается на высшие размерности. Наглядно это показал Рив, предложив в 1957 г. рассмотреть тетраэдр (называемый теперь тетраэдром Рива) со следующими вершинами: A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), D(1,1,k). Этот тетраэдр ABCD при любых k не содержит внутри ни одной точки с целочисленными координатами, а на его границе — лежат только четыре точки A, B, C, D. Таким образом, объём и площадь поверхности этого тетраэдра могут быть разными, в то время как число точек внутри и на границе — неизменны; следовательно, формула Пика не допускает обобщений даже на трёхмерный случай.  Тем не менее, некоторое подобное обобщение на пространства большей размерности всё же имеется, — это многочлены Эрхарта, но они весьма сложны, и зависят не только от числа точек внутри и на границе фигуры.  Так как большинство учащихся обладает средней или даже ниже средней мотивацией к изучению математики, то для них предлагаю следующий алгоритм вычисления пощади многоугольника на клетчатой бумаге:   1. Отмечаем внутренние и граничные узлы. 2. Считаем количество внутренних и граничных узлов. 3. Подставляем полученные данные в формулу Пика и вычисляем.   Приведем два варианта заданий, в которых для нахождения площади фигур можно применить формулу Пика.  *Вариант 1*   |  | | --- | | 1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.  pic.6 | | 2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.  pic.1 | | 3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.  pic.228 | | 4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.  pic.113 |   Вариант 2   |  | | --- | | 1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.  pic.11 | | 2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.  pic.101 | | 3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.  pic.233 | | 4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см \times1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.  pic.110 |   Ответы к варианту 1   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | № задания | 1 | 2 | 3 | 4 | | Ответ | 6 | 6 | 12,5 | 17,5 |   Ответы к варианту 2   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | № задания | 1 | 2 | 3 | 4 | | Ответ | 6 | 7,5 | 6 | 14 |   Находить площадь трапеции, параллелограмма, треугольника проще и быстрее по соответствующим формулам площадей этих фигур. Но когда дан многоугольник, у которого пять и более углов формула Пика работает хорошо.  На рисунке ниже представлены фигуры:    Это типовые фигуры, для которых стоит вопрос о нахождении их площади. Такие или подобные им будут в заданиях ЕГЭ. При помощи формулы Пика такие задачи решаются за минуту.  Предлагается 4 задания, в которых необходимо самостоятельно найти площади следующих фигур:  №1. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах. http://matematikalegko.ru/wp-content/uploads/2013/09/21.gif  №2. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах. http://matematikalegko.ru/wp-content/uploads/2013/09/22.gif  №3. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.    №4. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.  http://matematikalegko.ru/wp-content/uploads/2013/09/23.gif  Итак, формула Пика позволяет решать как простые, так и более сложные задачи. Личный педагогический опыт показывает, что формулу Пика может освоить любой ученик, умеющий выполнять несложные математические вычисления.  Однако, наряду с достоинством формулы, есть и недостатки: формулу можно применить лишь для задач, фигуры в которых расположены на клетчатой решетке, вершины которых лежат в узлах решетки. К сожалению формула Пика дает погрешность при нахождении площади круга или кольца на клетчатой бумаге. Поэтому ее не рекомендуется использовать при решении подобных задач.  Тем не менее, формула Пика — это настоящее спасение для тех учеников, которые так и не смогли выучить все формулы для вычисления площадей фигур, для тех, кто так и не уяснил до конца, как выполнить разбиение фигуры или дополнительное построение, чтобы подобраться к вычислению её площади «через знакомых». С другой стороны, для тех, кто площадь многоугольника, изображённого на клетчатой бумаге, умеет находить с помощью вышеперечисленных приёмов, формула Пика послужит дополнительным инструментом, с помощью которого можно будет решить задачу ещё и этим способом (и тем самым проверить правильность своего предыдущего решения, сверив полученные ответы).  Ниже предложен материал для организации работы самостоятельной работы учащихся по нахождению площадей фигур на клетчатой бумаге.  1 2 3  1) 2) 3)  4 5 7 8  4) 5) 6) 7)  9 10 11 12  8) 9) 10) 11)  13 pic.227 pic.113  12) 13) 14)    15) 16) 17)    18) 19) 20)    21) 22)  23) | |
| **Список литературы и других источников по теме** | 1. <http://alexlarin.net/ege11.html> 2. <http://ege.yandex.ru/mathematics/> 3. <http://reshuege.ru/> 4. А.С. Крутицких и Н.С. Крутицких. Подготовка к ЕГЭ по математике. |
| **Автор-составитель** | Камарда Е.П., учитель математики МБОУ «Кулундинская средняя общеобразовательная школа № 2» Кулундинского района, тьютор Мобильной сети учителей математики |