**Консультация с использованием**

**информационно-телекоммуникационных технологий**

**Введение**

|  |  |
| --- | --- |
| Наименование разработки | Физический и геометрический смысл производной. Касательная (ЕГЭ профиль,7 задание) |
| Целевая группа | *Руководители методических объединений учителей математики, учителя математики* |
| Область применения разработки | *Обеспечение выполнения плана мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2020 году (Приказ АИРО им. А.М. Топорова от 28.02.2020 г. № 40)* |

1. **Основания для разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Документ (документы), на основании которых выполняется работа | *План мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2020 году (Приказ АИРО им. А.М. Топорова от 28.02.2020 г. № 40)**План работы мобильной сети учителей математики Алтайского края* |

1. **Назначение разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Цель | *Содействие развитию профессиональной (предметной) компетентности учителей математики – формирование конкретных знаний, умений и навыков в области решения задач с применением производной функции* |

**Физический и геометрический смысл производной. Касательная**

**(ЕГЭ профиль, 7 задание)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ** | **СОДЕРЖАНИЕ** |
|  | **Ключевые слова** | Производная. Физический смысл производной. Геометрический смысл производной. Мгновенная скорость. Касательная к графику функции. Угловой коэффициент касательной. Тангенс угла наклона касательной |
|  | **Аннотация к содержанию консультации** | Содержание консультации раскрывает опыт работы учителя математики по формированию и развитию у обучающихся умений решать задачи по теме производная, а именно с использованием физического и геометрического смысла производной. |
|  | **Запрос на консультирование** | Как научить решать задачи, используя определения  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Текст консультации**Задачи, где используется физический или геометрический смысл производной, или касательная к графику функции включены в первую часть ЕГЭ по математике профильного уровня.Решение задач на использование физического смысла производной вызывает небольшие затруднения у старшеклассников. Значительные проблемы связаны с геометрическим смыслом производной и касательной к графику функции. Исходя из этого большая часть консультации посвящена геометрическому смыслу производной.**Немного теории** **Физический смысл производной** – производная в точке *х* есть мгновенная скорость точки в момент времени *x*. В случае произвольной функции *y = f(x)* **производная** *f(x)* характеризует скорость изменения переменной y (функции) по отношению к изменению аргумента *x*.**Геометрический смысл производной.** Производная функции y = f(x) в точке *x0* равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой в этой точке.*k = f* *'(x0)= tg*$α$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3976/20190730120303/OEBPS/objects/c_matan_11_14_1/7d7b2b17-3471-42c5-9695-0e2a393d22b4.gif | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3976/20190730120303/OEBPS/objects/c_matan_11_14_1/7d7b2b17-3471-42c5-9695-0e2a393d22b4.gif | https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/3976/20190730120303/OEBPS/objects/c_matan_11_14_1/7d7b2b17-3471-42c5-9695-0e2a393d22b4.gif |
| *f'(x0)= tg*$α$ *> 0* | *f'(x0)= tg*$α$ *= 0* | *f'(x0)= tg*$α$ *< 0* |

Если угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой *x0* с положительным направлением оси *х* острый, то *tg*$α$ положителен, а потому производная функции *f(x)* в точке *x0* положительна.Если угол наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой *x0* с положительным направлением оси *х* тупой, то *tg*$α$ отрицателен, а потому производная функции *f(x)* в точке *x0* отрицательна.Исходя из геометрического смысла производной можно сформулировать следующее следствие: *угловой коэффициент касательной к графику функции в точке положителен (k > 0), если функция в этой точке возрастает, и k < 0, если функция в этой точке убывает.***Примеры задач (физический смысл производной)****Пример 1.** **Материальная точка движется прямолинейно по закону**  ***x(t) =* 6*t2 –* 48*t* + 17, где  *x(t)* – расстояние от точки отсчета в метрах,** *t***– время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в метрах в секунду) в момент времени *t* = 9 с.****Решение.**1. Найдем производную функции ***x(t) =* 6*t2* – 48*t* + 17** ***x****'****(t) =* 12 *t* – 48**  2. Найдем значение производной в точке *t* = 9: ***x****'***(9) = 12·9 – 48**   ***x****'***(9) = 60****Ответ:** 60 м/с.**Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону *x(t)* = *t2* – 13*t* + 23, где***x(t)***– расстояние от точки отсчета в метрах,***t* **– время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?****Решение.**Если нам известна скорость точки в некий момент времени, следовательно, нам известно значение производной в точке *t*.Найдем производную функции ***x(t)* = *t*2 – 13*t* + 23**:***x****'****(t) =* 2*t* – 13.**По условию, скорость точки равна 3 м/с, значит, значение производной в момент времени t0 равно 3: ***x****'***(*t0*) = 3.** Получаем уравнение:**2*t0* – 13 = 3*****t0* = 8****Ответ: 8 с.****Пример 3.** **Материальная точка движется прямолинейно по закону *x(t)* =**$\frac{1}{3}$ ***t3* – 3*t2* – 5*t* + 3, где *x(t)* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?****Решение.**Найдем производную функции ***x(t)* =**  $\frac{1}{3}$ ***t3* – 3*t2* – 5*t* + 3:*****x****'* ***(t) = t2* – 6*t* – 5**По условию, скорость точки равна 2 м/с, значит, значение производной в момент времени *t0* равно 2: ***x****'* ***(t0)* = 2.** Получаем уравнение:***t0*2 – 6*t0* – 5 = 2*****t0 2* – 6*t0* – 7 = 0*****t1* = 7, *t2*= –1** – не подходит по смыслу задачи: время не может быть отрицательным.**Ответ: 7 с.****Примеры задач (геометрический смысл производной. Касательная к графику функции)****Пример 4.** На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой *x*0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке *x*0.https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=65037&png=1**Решение.** Воспользуемся, тем что *k =**f'(x0)= tg*$α$*,* значит для решения задачи нужно найти значение тангенса угла, который образует касательная с положительным направлением оси *х.* Для этого построим прямоугольный треугольник АВС:https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=65036&png=1Воспользуемся определением тангенса. *tg*$∠$*АСВ=* $\frac{АВ}{ВС} $= $\frac{6}{3}$ = 2. Учитывая, что угол наклона касательной с положительным направлением оси *х* является острым, имеем *tg*$α$*>0.* Получаем *f'(x0) =* 2.**Ответ:** 2.**Пример 5.** На рисунке изображены график функции *y* = *f*(*x*) и касательная к нему в точке с абсциссой *x*0. Найдите значение производной функции *f*(*x*) в точке *x*0.https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=64678&png=1**Решение.**Аналогично предыдущей задаче. Воспользуемся, тем что *k = f’(x0) = tg*$α$*,* значит, для решения задачи нужно найти значение тангенса угла, который образует касательная с положительным направлением оси *х.* Для этого построим прямоугольный треугольник *АВС*:https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=64679&png=1Воспользуемся определением тангенса: *tg*$∠$*АСВ =* $\frac{АВ}{ВС} $= $\frac{2}{8}$ = 0,25. Учитывая, что угол наклона касательной с положительным направлением оси *х* является тупым, имеем *tg*$α$ *< 0.* Получаем *f'(x0) = –0,25.***Ответ:** –0,25.**Пример 6.** На рисунке изображены график функции *y* = *f*(*x*) и касательная к нему в точке с абсциссой *x*0. Найдите значение производной функции *f*(*x*) в точке *x*0.https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=64684&png=1**Решение.**Аналогично предыдущей задаче. Воспользуемся, тем что *k = f’(x0)= tg*$α$*,* значит, для решения задачи нужно найти значение тангенса угла, который образует касательная с положительным направлением оси *х.* Для этого построим прямоугольный треугольник *АВС*:https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=64685&png=1Воспользуемся определением тангенса: *tg*$∠$*АСВ=* $\frac{АВ}{ВС} $= $ \frac{3}{6}$ = 0,5. Учитывая, что угол наклона касательной с положительным направлением оси *х* является тупым, имеем *tg*$α$ *< 0.* Получаем *f'(x0)= - 0,5.***Ответ:** –0,5.**Пример 7.** На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой *x*0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке *x*0.https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=65015&png=1**Решение.**Аналогично предыдущей задаче. Воспользуемся, тем что *k = f’(x0) = tg*$α$*,* значит для решения задачи нужно найти значение тангенса угла наклона. Для этого построим прямоугольный треугольник *АВС*: https://ege.sdamgia.ru/get_file?id=65016&png=1Воспользуемся определением тангенса: *tg*$∠$*АСВ=* $\frac{АВ}{ВС} $= $ \frac{6}{3}$ = 2. Учитывая, что функция убывает в точке *x0*, имеем *tg*$α$ *< 0.* Получаем *f'(x0)= – 2.***Ответ:** –2.**Пример 8.** Прямая *y* = –3*x* + 4 параллельна касательной к графику функции *y* = –*x2* + 5*x* – 7. Найдите абсциссу точки касания.**Решение.**Воспользуемся *k = y'(x0).* Найдем производную функции *y* = –*x2*+ 5*x* – 7: *y'* = –2*x* + 5. Получаем, что *y'* *(х0)* = –2*х0* + 5. Из уравнения прямой *y* = –3*x* + 4 находим, что *k = –3*. Так как прямая *y* = –3*x* + 4 параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен –3. Получим уравнение: –2*х0* + 5 = –3*х0*= 4.**Ответ:** 4.**Пример 9**. Прямая *y* = − 2*x* − 8 является касательной к графику функции *y*= *x3* + 3*x2* – 11*x* – 3. Найдите абсциссу точки касания.**Решение.**Воспользуемся *k = f'(x0).* Найдем производную функции *y* = *x3* + 3*x2* – 11*x* – 3: *y'*= 3*x2*+ 6*x* – 11, значит, *y'(х0)* = 3*x0*2 + 6*x0* – 11. Из уравнения прямой *y*= − 2*x* − 8 находим, что *k = –2*. Получим уравнение: 3*x0*2 + 6*x0* – 11 = –23*x0*2 + 6*x0* – 9 = 0*x0*= –3 или *x0* = 1.Получили два решения, но точка касания может быть только одна. Нужно найти значение функций в точках с абсциссами –3 и 1 и сравнить полученные значения функций. Найдем значения функций *y* = *x3* + 3*x2* – 11*x* – 3 и *y* = − 2*x* − 8 в точке *х0*=  –3:*y*(–3) = (–3)3 + 3·(–3)2 – 11·(–3) – 3 = 30*y*(–3) = − 2·(–3) − 8 = –2Значения функций не равны, а значит точка с абсциссой –3, не является точкой касания.Найдем значения функций *y* = *x3* + 3*x2* – 11*x* – 3 и *y* = − 2*x* − 8 в точке *х0*= 1:*y*(1)= 13 + 3·12 – 11·1 – 3= –10*y*(1) = − 2·1 − 8 = –10Значения функций равны, а, значит, точка с абсциссой 1 является точкой касания.**Ответ:** 1.**Пример 10.** На рисунке изображён график *y = f'(x)* – производной функции *f(x).* Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции *y=f(x)* параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.График y=f'(x) — производной функции f(x).**Решение.** Пусть *x0*​ – абсцисса точки, в которой касательная к графику функции *y = f(x)* параллельна оси абсцисс или совпадает с ней. Тогда значение производной *y = f '(x)* в точке *x0​* равно 0, так как угловой коэффициент оси абсцисс *y* = 0 равен 0. Но из графика производной функции *f(x)* считываем: *f*'(*x*) = 0 в единственной точке x0 ​= −5.**Ответ:** –5.**Пример 11.** На рисунке изображён график *y = f'(x)* – производной функции *f(x)* Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции *y = f(x)* параллельна прямой *y* = 3*x* + 2 или совпадает с ней.График y=f'(x) — производной функции f(x)**Решение.**Пусть *x​0*​​ – абсцисса точки, в которой касательная к графику функции *y = f(x)* параллельна прямой *y*= 3*x* + 2 или совпадает с ней. Тогда значение производной *y = f'(x)* в точке *x​0​​* равно 3, так как угловой коэффициент касательной, параллельной прямой *y =* 3*x* + 2, равен 3.Но из графика производной функции *f(x)* замечаем, что *f'(x)* = 3 в единственной точке *x0​* ​​= −1.**Ответ:** –1.**Пример 12.** Прямая *y* = 5*x* + 17 является касательной к графику функции *y* = 12*x2* + *bx* + 20.  Найдите *b*, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.**Решение.**Касательная *y* = 5*x* + 17 к параболе *y* = 12*x*2 + *bx* + 20 имеет с параболой единственную общую точку. Поэтому квадратное уравнение 5*x* + 17 = 12*x*2 + *bx* + 20 должно иметь единственное решение. Для этого надо потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю. Преобразуем уравнение 5*x* + 17 = 12*x*2 + *bx* + 20 к стандартному виду:12*x*​2 ​​+ (*b* − 5)*x* + 3 = 0.*D* = (*b* − 5)​2 − 4⋅12⋅3 = 0,(*b –* 5)2 = 144,*b* – 5 = ±12,*b*1 = 17, *b*2 = –7При *b* = 17 абсциссу точки касания находим из уравнения12*x*2 + (*b* –5)*x* + 3 = 0, 12*x*2 + 12*x* + 3 = 0. Решая уравнение, получаем *х* = –0,5 ​​< 0, поэтому *b* = 17 не является искомым.При *b* = –7 получаем уравнение 12*x*2 – 12*x* + 3 = 0. Из этого уравнения находим, что *х* = 0,5 > 0, значит *b* = –7 искомое значение.**Ответ:** –7. |
| **Список литературы и других источников по теме** | 1. [alexlarin.net](https://alexlarin.net/) – Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор.
2. [fipi.ru](http://yandex.ru/clck/jsredir?bu=5z3n36&from=yandex.ru%3Bsearch%2F%3Bweb%3B%3B&text=&etext=2202.WpI1Fpre4hL0zH5G6Htq5HFqbGxpZnFiZW9teXV0ZWI.5a1c8f5b5fe575f870b2236568e3b029abdfb6fe&uuid=&state=jLT9ScZ_wbo,&&cst=AiuY0DBWFJ5Hyx_fyvalFJCYZnAipb25wiTJaNgp60eaGtJOuJxt7IL2oVbv5VESOFGs07sSsFNYfRgGWMHoFWIo7oE7uds3bwUaX7CLn1gWemnLTgb8-Jpxf2gCAdIDMQECQznTAsyrR8hwV4GhmWmgUWnGoz0WDfJfuUyi2OPCds4ScHQPxoUAyVtIey8ARQAPlzAwyKUXFN5rQ-CoiGnqwWDIFsgnQB-ULoDxWanBUJs7HFcC3WWuWgmPELImiXUIFDqTP0MFhUv4jIFbTSxXrw1i6pkrmBNbK3hmLbeNkUTKGR8i8pY3E_zcxl8CGsbbMm2zc4w8jOKootJ28nmpFTjDua06EQtMOC-wG7b3ormr_62AZ87s80qzN1lzlQxIANYA1_dA1treZmEGnEdBmoZ6gEkxOGjWcBUt_0SA7DIanCLICZ81P-sYqhYck0bN-dDBqawvbawRaMbw4sIe5fVjJnCgNOM95-hjig-8LAtl09TqbNuIGO-IL9eTvHCd_n7m5GBIvJPGxAAY5g,,&data=UlNrNmk5WktYejR0eWJFYk1LdmtxazVKcXJKTHpxci0xUmcxdDRLbWNpMDdFdzVwOUxsa01CTERQUkEtSmF0MjUybGw3WHJpRGtDWVBqaHcyLWxnRHFHNHVmY3Z4VUdJ&sign=729caa4fef66dcfeff282ca2761064df&keyno=0&b64e=2&ref=orjY4mGPRjk5boDnW0uvlrrd71vZw9kpVBUyA8nmgRFSkmcF3yD8E0CH-oI8WbAilAmZyRZlWWk19sDe1iELLF__Ie6qKR6sqdn8IW1a1RDECG3JHcDA5A,,&l10n=ru&rp=1&cts=1583084970632%40%40events%3D%5B%7B%22event%22%3A%22click%22%2C%22id%22%3A%225z3n36%22%2C%22cts%22%3A1583084970632%2C%22fast%22%3A%7B%22organic%22%3A1%7D%2C%22service%22%3A%22web%22%2C%22event-id%22%3A%22k79bx11krd%22%7D%5D&mc=4.20184123230257&hdtime=80089.005) **– Сайт ФИПИ.**
3. [https://4ege.ru/](https://4ege.ru/%20) – Сайт подготовки к ЕГЭ и ОГЭ.
4. <https://ege.sdamgia.ru> **– Сайт "Решу ЕГЭ".**
5. <https://academyege.ru/> **– сайт Академия ЕГЭ.**
6. Алгебра и начала математического анализа 10-11кл. / А.Г. Мордкович и др. – М. : Мнемозина, 2010.
7. ЕГЭ 2020. Математика. 36 вариантов. Профильный уровень. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / Под ред. Ященко И.В.
 |
| **Автор-составитель** | Маркова Ольга Алексеевна, учитель математики МБОУ «Ремзаводская» Павловского района Алтайского края |

*Сетевая консультация подготовлена в рамках проекта «Мобильная сеть учителей математики Алтайского края».*