**Консультация с использованием**

**информационно-телекоммуникационных технологий**

**Введение**

|  |  |
| --- | --- |
| Наименование разработки | *Изучение многочленов в профильных классах* |
| Целевая группа | *Руководители методических объединений учителей математики, учителя математики* |
| Область применения разработки | *Обеспечение выполнения плана работы отделения краевого учебно-методического объединения по математике на 2019-2020 уч.г.* |

1. **Основания для разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Документ (документы), на основании которых выполняется работа | *План работы отделения краевого учебно-методического объединения по математике на 2019-2020 уч.г.* |

1. **Назначение разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| Цель | *Содействие развитию профессиональной (предметно-методической) компетентности учителей математики в области формирования и развития у школьников умений по теме «Многочлены»* |

**Изучение многочленов в профильных классах**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **СТРУКТУРНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ** | **СОДЕРЖАНИЕ** |
|  | **Ключевые слова** | Многочлены, преобразование многочленов, алгоритм Евклида, теорема Безу, теорема о корнях многочлена, метод неопределённых коэффициентов, схема Горнера, решение алгебраических уравнений |
|  | **Аннотация к содержанию консультации** | В консультации представлены теоретические положения, на основании которых решаются различные задания по теме «Многочлены»; раскрыты разные виды многочленов и соответствующие приёмы нахождения корней этих многочленов. Показана связь многочленов с алгебраическими уравнениями.Содержание сетевой консультации можно использовать для проведения уроков, учебных занятий в классах с углубленным изучением математики, посвященных решению алгебраических уравнений, неравенств на основе теоретических выкладок, полученных при изучении многочленов. |
|  | **Запрос на консультирование** | Каковы ключевые позиции в теории многочленов, обеспечивающие решение алгебраических уравнений разных видов? |

**Изучение многочленов в профильных классах**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Текст консультации**Изучению темы «Многочлены» в программе по математике уделяется большое внимание. Учащиеся основной школы овладевают умениями складывать и вычитать, умножать многочлены от одной или нескольких переменных. Значительное место в теме занимают задания, связанные с разложением многочленов на множители, решением алгебраических уравнений. При изучении математики в курсе основной школы упор делается на изучение квадратного трёхчлена. В старшей школе учащиеся работают с многочленами 3-й, 4-й и высших степеней от одной переменной, выполняют операции с ними. Школьный математический курс включает некоторые методы отыскания корней многочленов, операции деления многочлена на многочлен. В связи с этим учащиеся получают возможность решать отдельные алгебраические уравнения высших степеней (в том числе возвратные, однородные), используя различные приёмы отыскания корней многочленов.Профильное изучение темы «Многочлены» позволяет учащимся распознавать виды многочленов и алгебраических уравнений, уверенно выполнять их преобразования, выбирая наиболее рациональные приёмы.Кругозор школьников пополняется знанием алгоритма Евклида, теоремы Безу, теоремы о корнях многочлена, следствиями из этих теорем, знанием метода неопределённых коэффициентов. Учащиеся получают более целостное представление о многочленах от одной переменной, способах их преобразований.Овладевая довольно сложными математическими преобразованиями многочленов высших степеней, школьники встают перед фактом постоянно анализировать, классифицировать, перебирать различные варианты решений, отыскивать наиболее рациональные способы, выполнять самоанализ и при этом быть предельно внимательными и точными. Проводя цепочку логических рассуждений, они видят немыслимо сложное выражение, которое в процессе определённых преобразований может приобрести простые формы. В итоге, приходит понимание того, что даже самые сложные многочлены можно сделать «послушными», нужно только узнать их «слабые» стороны и изучить методы воздействия на них. Основная образовательная программа по математике на углубленном уровне предлагает изучение следующих вопросов по теме «Многочлены»:* Действия над многочленами. Корни многочлена.
* Разложение многочлена на множители.
* Чётность многочлена. Рациональные дроби.
* Представление рациональных дробей в виде суммы элементарных.
* Алгоритм Евклида.
* Теорема Безу. Применение теоремы Безу для решения уравнений высших степеней.
* Разложение на множители методом неопределённых коэффициентов.
* Методы решения уравнений с целыми коэффициентами.

Остановимся более подробно на отдельных теоретических вопросах темы и рассмотрим некоторые практические задачи, их иллюстрирующие.**Алгоритм Евклида для нахождения НОД***Алгори́тм Евкли́да* — эффективный алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел (или общей меры двух отрезков). Алгоритм назван в честь греческого математика Евклида (III век до н. э.), который впервые описал его в VII и X книгах «Начал». Это один из старейших численных алгоритмов, используемых в наше время.В самом простом случае алгоритм Евклида применяется к паре положительных целых чисел и формирует новую пару, которая состоит из меньшего числа и разницы между большим и меньшим числом. Процесс повторяется, пока числа не станут равными. Найденное число и есть наибольший общий делитель исходной пары. Евклид предложил алгоритм только для натуральных чисел и геометрических величин (длин, площадей, объёмов). Однако в XIX веке он был обобщён на другие типы математических объектов, включая целые числа Гаусса и полиномы от одной переменной. Это привело к появлению в современной общей алгебре такого понятия, как евклидово кольцо. Позже алгоритм Евклида был обобщён на другие математические структуры, такие как узлы и многомерные полиномы.Суть алгоритма нахождения наибольшего общего делителя многочленов А и В (НОД (А, В)) заключается в том, чтобы последовательно проводить деление с остатком, в ходе которого получается ряд равенств вида:*A=Q1B+R1**B=Q2R1+R2**R1=Q3R2+R3**……………**Rk-3=Qk-1Rk-2+Rk-1**Rk-2 = QkRk-1*Просматривая цепочку равенств снизу вверх, находим, что *Rk-1*является делителем многочленов А и В. Больше того, *Rk-1* есть наибольший общий делитель многочленов А и В, так как если просматривать цепочку равенств сверху вниз, то окажется, что любой делитель многочленов А и В является делителем *Rk-1*. Следовательно, НОД (А, В)=*Rk-1.*Другими словами, НОД (А, В) есть последний, неравный нулю, остаток в алгоритме Евклида.*Пример 1*. Найти НОД *((x6 – 1);(x8 – 1))* по алгоритму Евклида.*Решение*. (Применим более короткую запись)http://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/410641/img1.gifНОД*((x6 – 1);(x8 – 1)) = x2 – 1*.*Ответ*: *x2 – 1*.**Теорема Безу***Этьен Безу* – французский математик, член Парижской Академии Наук (с 1758 г.), родился в Немуре 31 марта 1730 г. и умер 27 сентября 1783 г. С 1763 г. Безу преподавал математику в училище гардемаринов, а с 1768 г. и в королевском артиллерийском корпусе.Основные работы Этьена Безу относятся к высшей алгебре, они посвящены созданию теории решения алгебраических уравнений. В теории решения систем линейных уравнений он содействовал возникновению теории определителей, развивал теорию исключения неизвестных из систем уравнений высших степеней, доказал теорему (впервые сформулированную К. Маклореном) о том, что две кривые порядка *m* и *n* пересекаются не более чем в *mn* точках. Во Франции и за её границей вплоть до 1848 г. был очень популярен его шеститомный «Курс математики», написанный им в 1764-69 гг. Безу развил метод неопределённых множителей. В элементарной алгебре его именем назван способ решения систем уравнений, основанный на этом методе. Часть трудов Безу посвящена внешней баллистике. Именем учёного названа одна из основных теорем алгебры.Невзирая на кажущуюся простоту и очевидность, данная теорема является одной из базовых теорем теории многочленов. В данной теореме алгебраические характеристики многочленов (они позволяют работать с многочленами, как с целыми числами) связываются с их функциональными характеристиками (которые позволяют рассматривать многочлены как функции).**Теорема Безу** утверждает, что остаток от деления многочлена *P(x)* на двучлен *(x-a) –* это *P(a).*Но наиболее важна не столько теорема, а сколько *следствия из теоремы Безу*: 1. Остаток от деления многочлена *Pn (x)* на двучлен *ax+b* равен значению этого многочлена при *x = –b/a* , т. е. *R=Pn (–b/a)* .
2. Число *a* – корень многочлена P(x) тогда и только тогда, когда P(x) делится без остатка на двучлен x – a. Исходя из этого – множество корней многочлена P(x) тождественно множеству корней соответствующего уравнения P(x) = 0.
3. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (когда старший коэффициент равен единице – все рациональные корни целые).
4. Предположим, что *a* – целый корень приведенного многочлена P(x) с целыми коэффициентами. Значит, для любого целого *k* число *P(k)* делится на *a – k*.
5. Если многочлен *P (x)* имеет попарно различные корни *a1 , a2 , … , an*, то он делится на произведение *(x – a1)· … · (x – an)* без остатка.
6. Многочлен степени *n* имеет не более *n* различных корней.
7. Для любого многочлена *P(x)* и числа *a* разность *(P(x) – P(a))* делится без остатка на двучлен (*x – a*).
8. Многочлен, не имеющий действительных корней, в разложении на множители не содержит линейных множителей.

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать дальше корни многочлена, степень которого уже на 1 меньше: если *P(a)=0*, то данный многочлен P(x) будет выглядеть так: *P(x)=(x – a)Q(x).* Таким образом, после нахождения одного корня дальше находят уже корни многочлена *Q(x)*, степень которого на 1 меньше степени начального многочлена. Иногда таким методом, который называется *методом понижения степени*, находят все корни данного многочлена.Остановимся на рассмотрении некоторых случаев применения теоремы Безу к решению практических задач.*Пример 2.* При каких значениях *a* и *b* многочлен *Р(х)=ax3 + bx2 – 73x + 102* делится на трёхчлен *x2 – 5x + 6* без остатка?*Решение*.Разложим делитель на множители: *x2 – 5x + 6 = (x – 2)(x – 3) .*Поскольку двучлены *x – 2* и *x – 3* взаимно простые, то данный многочлен делится на *x – 2* и на *x – 3*, а это значит, что по теореме Безу*R1 = P(2) = 8a + 4b – 146 + 102 = 8a + 4b – 44 = 0* *R2 = P(3) = 27a+9b – 219 + 102 = 27a +9b – 117 =0*Решим систему уравнений:Отсюда получаем:*a = 2, b = 7.**Ответ*: *a = 2, b = 7*.*Пример 3.*Разложите на множители многочлен *P(x) = x4 + 4x2 – 5*.*Решение*.Среди делителей свободного члена число *1* является корнем данного многочлена *P(x)*, значит, по следствию 3 из теоремы Безу *P(x)* делится на *(x – 1)* без остатка:*P(x) = (x – 1)(x3 + x2 + 5x + 5).*Среди делителей свободного члена многочлена *x3 + x2 + 5x + 5**x = –1* является его корнем, а это значит, что по следствию 3 из теоремы Безу *x3 + x2 + 5x + 5* делится на *(x + 1)* без остатка.Отсюда *P(x) = (x – 1)(x +1)(x2 +5)*.По следствию 8 *(x2 + 5)* на множители не раскладывается, т.к. действительных корней не имеет, поэтому *P(x)* далее на множители не раскладывается.Ответ: *x4 + 4x2 – 5 = (x – 1)(x +1)(x2 +5)*.*Пример 4.* Какую кратность имеет корень *2* для многочлена *P(x) = x5 - 5x4 + 7x3 – 2x2 + 4x – 8?**Определение.* Если многочлен *P(x)* делится без остатка на *(x–a)k* , но не делится на *(x – a)k+1*, то говорят, что число *a* является корнем кратности *k* для *P(x).**Решение*. *(x5  - 5x4 + 7x3 – 2x2 + 4x – 8):(x – 2)= x4 – 3x3 + x2 + 4**(x4 – 3x3 + x2 + 4 ):(x – 2)= x3 – x2 – x – 2**(x3 – x2 – x – 2 ):( x – 2)= x2 + x + 1**(x2 + x + 1)* на *( x – 2)* не делится, так как *R=22 + 2 + 1=7*.Значит, *P(x):(x – 2)3 = x2 + x + 1*, т.е. корень *2* имеет кратность *3* для многочлена *P(x)*.*Ответ*: корень *2* имеет кратность *3* для многочлена *P(x)*.*Пример 5.* Составьте кубический многочлен, имеющий корень *4* кратности *2* и корень *–2*.*Решение*. По следствиям 2 и 5, если многочлен *P(x)* имеет корень *4* кратности *2* и корень *–2*, то он делится без остатка на *(x–4)2(x+2)*, значит *P(x):(x – 4)2(x + 2) = Q(x)*, т.е. *P(x) = (x – 4)2(x + 2)Q(x) = (x2 – 8x +16)(x + 2)Q(x) =**= (x3 – 8x2 + 16x +2x2 – 16x + 32)Q(x) = (x3 – 6x2 + 32)Q(x).**(x3 – 6x2 + 32)* – кубический многочлен, но по условию *P(x)* – также кубический многочлен, следовательно, *Q(x)* – некоторое действительное число.Пусть *Q(x) = 1*, тогда *P(x) = x3 – 6x2 + 32*.*Ответ*: *x3 – 6x2 + 32*.*Пример 6.*Решите уравнение *x6+x5– 7x4– 5x3+16x2+6x – 12=0*.*Решение*.Посмотрев на уравнение, сразу можно сказать, оно имеет не более 6 корней. Находим их среди делителей свободного члена (следствие 3):±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.Корнем многочлена *x6 + x5 – 7x4 – 5x3 + 16x2 + 6x – 12* является число *1*, значит, многочлен делится на *(х – 1).* Выполнив деление любым способом, получим*x6 + x5 – 7x4 – 5x3 + 16x2 + 6x – 12 =(x – 1)(x5+2x4– 5x3– 10x2+6x+12)*Корнем многочлена *x5 + 2x4 – 5x3 – 10x2 + 6x + 12* является число –*2*, значит, многочлен делится на *(х+2).**x6+x5– 7x4– 5x3+16x2+6x – 12=(x – 1)(x+2)(x4– 5x2+6)**x4 – 5x2 + 6 =0* – биквадратное уравнение, его корни $x\_{1,2}=\pm \sqrt{2}, x\_{3,4}=\pm \sqrt{3}$.Ответ: –2; 1; $\pm \sqrt{2}$; $\pm \sqrt{3}$.Из рассмотренных примеров видно, что теорема Безу находит применение при рассмотрении одной из важнейших задач математики – решении уравнений. Кроме этого, она используется при решении задач, связанных с делимостью многочленов (нахождение остатка при делении многочленов, определение кратности многочленов и т.д.), с разложением многочленов на множители, с определением кратности корней и многих других.**Симметрические многочлены от нескольких переменных****Определение.** Многочлен от нескольких переменных называют *симметрическим многочленом,* если его вид не изменяется при любой перестановке этих переменных (С.М.Никольский).Например, многочлен *x2y+xy2*– симметрический, а многочлен *x3 – 3y2* таковым не является, т.к. при замене получается многочлен *y3– 3x2*, не совпадающий с первоначальным.Любой симметрический многочлен от двух переменных *x* и *y* представим в виде многочлена от двух симметрических многочленов *α=x+y* и *β=xy*. Например, *x3+y3=(x+y)3– 3xy(x+y)=α3– 3αβ.*Этот приём позволяет решать уравнения, неравенства, системы степени не ниже второй.*Пример 7.* Решите систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}+x+y=8,\\x^{3}+y^{3}+x^{2}y+xy^{2}=15.\end{array}\right.$*Решение*. Пусть $x+y=a,xy=b$, тогда$x^{2}+y^{2}=\left(x+y\right)^{2}-2xy=a^{2}-2ab$$x^{3}+y^{3}=\left(x+y\right)\left(x^{2}-xy+y^{2}\right)=a\left(a^{2}-3b\right)$ $$ \left\{\begin{array}{c}a^{2}-2b+a=8,\\a\left(a^{2}-3b\right)+ab=15.\end{array}\right.$$$$ \left\{\begin{array}{c}2b=a^{2}+a-8,\\a^{3}-2ab=15.\end{array}\right.$$$$ \left\{\begin{array}{c}2b=a^{2}+a-8,\\a^{2}-a\left(a^{2}+a-8\right)=15.\end{array}\right.$$$$ \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}2b=a^{2}+a-8,\\a=5.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2b=a^{2}+a-8,\\a=3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$$$ \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}b=1,\\a=5.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}b=2,\\a=3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$$$ \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}xy=1,\\x+y=5.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}xy=2,\\x+y=3.\end{array}\right.\end{array}\right.$$Ответ: (1;2), (2;1).Уравнение степени *n* называется *симметрическим***,** если у него равны коэффициенты при *xn* и при *хn-r*. Таким образом симметрическое уравнение имеет вид: *a0xn+ a1xn-1 +…+ anxn-r+…+ a1x + a0 = 0.*Симметрические уравнения являются частным видом *возвратного уравнения*, поэтому симметрические уравнения решаются тем же способом, что и возвратные.Уравнения вида $a\_{0}x^{2n+1}+a\_{1}x^{2n}+…+a\_{n}x^{n+1}+a\_{n+1}x^{n}+…+a\_{2n}x+a\_{2n+1}=0$, если $\frac{a\_{2n+1}}{a\_{0}}=λ^{n+1}; \frac{a\_{2n}}{a\_{1}}=λ^{n}; \frac{a\_{n+1}}{a\_{n}}=λ, $где $λ $ – действительное число, называют ***возвратными уравнениями нечетной степени***. Уравнения вида $a\_{0}x^{2n}+a\_{1}x^{2n-1}+…+a\_{n-1}x^{n}+…+a\_{2n-1}x+a\_{2n}=0$, если $\frac{a\_{2n}}{a\_{0}}=λ^{n}, \frac{a\_{2n-1}}{a\_{1}}=λ^{n-1}, \frac{a\_{n+1}}{a\_{n-1}}=λ, $где $λ$ – действительное число, называют ***возвратными уравнениями четной степени*.**Возвратное уравнение нечетной степени имеет корень *x*=−λ.Возвратное уравнение четной степени ***2n*** с помощью подстановки *u=x+λ/x* сводится к уравнению степени ***n.******Пример 8.* Решите уравнение** $3х^{4}-2х^{3}+4х^{2}-4х+12=0$**.*****Решение.*****Это** возвратное уравнение четной степени, *λ = 2.* **Разделим обе части уравнения на** $х^{2} , $**введём замену** *u = x + 2/x.* Решив получившееся квадратное уравнение относительно *u*, и выполнив обратную замену, убедимся, что уравнение не имеет корней.*Ответ*: корней нет.**Некоторые свойства симметрических уравнений**1. Симметрическое уравнение нечетной степени имеет корень –1.
2. В результате деления симметрического уравнения нечетной степени на *(х + 1)* получается симметрическое уравнение четной степени на единицу меньше.
3. Симметрическое уравнение четной степени *2n* подстановкой*y = x + 1* может сводиться на области действительных чисел к уравнению степени *n* и к уравнениям второй степени.

*Пример 9.*Решите уравнение *х7– 2х6+3х5– х4– х3+3х2– 2х+1=0.**Решение*.Уравнение имеет корень *х = –1,* т.к. это симметрическое уравнение нечетной степени. Разделим многочлен в левой части на *(х–1)*. Получим: *(х – 1)(х6 – 3х5+ 6х4– 7х3+ 6х2 – 3х + 1) = 0,**х6 – 3х5+6х4 – 7х3 +6х2 – 3х + 1 = 0.*Разделим обе части уравнения на *х3* и объединим первый член с последним, второй с предпоследним и т.д.Получим:.Пусть, тогда,. Получаем: , *(у – 1)3= 0*, откуда *у=1*. Значит,,  и . Первые два уравнения корней не имеют, последнее уравнение имеет корень х = –1. Следовательно, исходное уравнение имеет только один корень–1. *Ответ*: –1.Уравнение вида $a\_{0}\left(u\left(x\right)\right)^{n}+a\_{1}\left(u\left(x\right)\right)^{n-1}v\left(x\right)+…+a\_{k}\left(u\left(x\right)\right)^{n-k}\left(v\left(x\right)\right)^{k}+…+a\_{n}\left(v\left(x\right)\right)^{n}=0$ называется *однородным уравнением* степени *n* относительно *u(x)* и *v(x).* Если обе части однородного уравнения разделить на $(v\left(x\right))^{n}$, применяя замену $t=\frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)},$ получим уравнение $a\_{0}t^{n}+a\_{1}t^{n-1}+…+a\_{k}t^{n-k}+…+a\_{n}=0.$*Пример 10.* Решите уравнение $$\left(x-3\right)^{2}\left(x+2\right)^{2}-\left(x-3\right)\left(x^{2}-4\right)-2\left(x-2\right)^{2}=0.$$*Решение*.После замены *u=(x – 3)(x+2), v=(x – 2)* исходное уравнение сведётся к однородному уравнению $u^{2}-uv-2v^{2}=0, $ решая которое, и переходя к обратной замене, получится *х* = 1.*Ответ*: 1.**Метод неопределенных коэффициентов**Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (а также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения:1. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.
2. Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один действительный корень, а потому разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителя.
3. Любой многочлен четвёртой степени разлагается в произведение многочленов второй степени.

Рассмотрим задачи, отражающие универсальность и красоту метода неопределенных коэффициентов в школьном курсе алгебры. Идея метода позволит школьникам расширить свои представления о действиях с многочленами, открыть для себя другой способ деления многочлена на многочлен, овладеть умениями избавления от иррациональности в знаменателе дроби, учиться раскладывать правильную рациональную дробь на простейшие. Предложенные примеры могут быть полезны как для учителей математики, так и для учащихся, интересующихся математикой.В школьном курсе алгебры в 7-9 классах учащиеся регулярно используют метод неопределенных коэффициентов при решении таких задач, как:* составить уравнение прямой, проходящей через точки 𝐴(2; −1) и 𝐵(5; 3);
* составить уравнение параболы, проходящей через точки (0; 6), (−3; 0), (1; 0);
* составить уравнение окружности, описанной около треугольника *АВС*, где 𝐴(0; 5), *В*(2; 1), *С*(8; 1).

Углубление темы «Многочлены» в 8-м классе позволяет учащимся распознавать виды многочленов и алгебраических уравнений, уверенно выполнять различные алгебраические преобразования и выбирать рациональные методы решений. Применение метода неопределенных коэффициентов хорошо иллюстрируются более сложными примерами.*Пример 11.* Вычислить сумму 𝑏 + 2𝑎, если многочлен 𝑥3 + 3𝑥2 + 𝑎𝑥 – 𝑏 делится нацело на 𝑥2 − 4.*Решение.*1) Так как заданный многочлен делится нацело на 𝑥2 − 4, то следует искать его разложение в виде: 𝑥3 + 3𝑥2 + 𝑎𝑥 − 𝑏 = (𝑥2 − 4)(𝑥 + 𝑐),𝑥3 + 3𝑥2 + 𝑎𝑥 − 𝑏 = 𝑥3 + 𝑐𝑥2 − 4𝑥 − 4𝑐.2) По методу неопределенных коэффициентов в последнем равенстве уравняются коэффициенты при 𝑥 и свободные члены:$$\left\{\begin{array}{c}3=c\\a=-4\\-b=-4c\end{array}⟺\left\{\begin{array}{c}c=3\\a=-4\\b=12\end{array}\right.\right.$$3) 𝑏 + 2𝑎 = 12 + 2 ∙ (−4) = 4.*Ответ*: 𝑏 + 2𝑎 = 4.Деление «уголком» многочлена на многочлен – очень важная и полезная операция, для изучения которой не требуется много учебного времени. При знакомстве с этой операцией целесообразно обратить внимание учащихся на универсальность метода неопределенных коэффициентов:*Пример 12.* Сократите дробь $\frac{x^{4}+x^{3}+4x^{2}-3x+5}{x^{2}-x+1}$.*Решение.*Бесспорно, одним из способов решения является деление дроби «уголком». Рассмотрим второй способ – с применением метода неопределенных коэффициентов. Если заданная дробь сократима, то её числитель может быть разложен на следующие множители:$x^{4}+x^{3}+4x^{2}-3x+5$ = ($x^{2}-x+1$)($x^{2}$+ 𝑎𝑥 + 𝑏),$x^{4}+x^{3}+4x^{2}-3x+5$ =$x^{4}-x^{3}+x^{2}+ax^{3}-ax^{2}+ax+bx^{2}-bx+b$,$x^{4}+x^{3}+4x^{2}-3x+5$ = $x^{4}$+ (−1 + 𝑎)$x^{3}$+ (1 − 𝑎 + 𝑏)$x^{2}$+ (𝑎 − 𝑏)𝑥 + 𝑏,$$\left\{\begin{array}{c}1=-1+a\\4=1-a+b\\-3=a-b\\5=b\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}a=2\\b=5\end{array}\right.$$Значит, $\frac{x^{4}+x^{3}+4x^{2}-3x+5}{x^{2}-x+1}=x^{2}$+ 2𝑥 + 5.*Ответ*: $x^{2}$+ 2𝑥 + 5.Тема «Квадратные уравнения» в 8-м классе является одной из важных, от глубины понимания которой будет зависеть дальнейшее изучение тем школьного курса алгебры не только в 9-м классе, но и в старшей школе.Целесообразно обратить внимание школьников на возможность применения метода неопределенных коэффициентов при выводе равенств в теореме Виета: Пусть𝑎 ≠ 0, а 𝑥1и 𝑥2– корни квадратного трехчлена 𝑎𝑥2+ 𝑏𝑥 + 𝑐, тогда:𝑎𝑥2+ 𝑏𝑥 + 𝑐 = 𝑎(𝑥 – 𝑥1)(𝑥 – 𝑥2),𝑎𝑥2+ 𝑏𝑥 + 𝑐 = 𝑎𝑥2+ 𝑎(−𝑥1– 𝑥2)𝑥 + 𝑎𝑥1𝑥2,$$\left\{\begin{array}{c}b=a\left(-x\_{1}-x\_{2}\right),\\c=ax\_{1}x\_{2}\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-\frac{b}{a},\\x\_{1}x\_{2}=\frac{c}{a}\end{array}\right.\right.$$В профильных классах метод неопределенных коэффициентов широко применяется в теме «Многочлены высших степеней». Приведем несколько примеров, которые будут полезны и для профильных классов, и на элективных курсах, и для учащихся, интересующихся математикой.*Пример 13.* Разложите многочлен 𝑝(𝑥) = 𝑥4+ 5𝑥3+ 11𝑥2+ 12𝑥 + 6 на множители с целыми коэффициентами.*Решение.*Необходимо искать разложение в виде 𝑝(𝑥) = (𝑥2+ 𝑎𝑥 + 𝑏)(𝑥2+ 𝑚𝑥 + 𝑛), которое после преобразований примет вид:𝑝(𝑥) = 𝑥4+ (𝑎 + 𝑚)𝑥3+ (𝑏 + 𝑎𝑚 + 𝑛)𝑥2+ (𝑏𝑚 + 𝑎𝑛)𝑥 + 𝑏𝑛Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях 𝑥, получим систему $\left\{\begin{array}{c}a+m=5,\\b+am+n=11,\\bm+an=12,\\bn=6.\end{array}\right.$Достаточно найти одно решение этой системы в целых числах, поэтому, опираясь на уравнение 𝑏𝑛 = 6, попробуем взять 𝑏 = 2, 𝑛 = 3, тогда $ \left\{\begin{array}{c}a+m=5,\\am=6,\\2m+3a=12.\end{array}\right.$Откуда 𝑎 = 2, 𝑚 = 3.*Ответ*: 𝑝(𝑥) = (𝑥2+ 2𝑥 + 2)(𝑥2+ 3𝑥 + 3).*Пример 14.* Найдите все значения 𝑎 и 𝑏, при которых многочлен 𝑥4−𝑎2𝑥3+ 74𝑥2+ 𝑏𝑥 + 25 является квадратом многочлена второй степени относительно 𝑥 с целыми коэффициентами.*Указание к решению*: данный многочлен должен быть тождественно равен (𝑥2+ 𝑝𝑥 + 𝑞)2, где 𝑝 и 𝑞– неопределенные коэффициенты (𝑝 и 𝑞 –целые).*Ответ*: 𝑎 = ±4, 𝑏 = −80.Еще один классический пример применения метода неопределенных коэффициентов – разложение правильной рациональной дроби на простейшие:*Пример 15.* Подобрать числа 𝐴, 𝐵, 𝐶 так, чтобы выполнялось тождество$$\frac{x^{2}+4x-1}{x^{3}+9x^{2}+23x+15}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}.$$*Решение.*Правую часть заданного тождества приведем к общему знаменателю, тогда исходное тождество примет вид:$$\frac{x^{2}+4x-1}{x^{3}+9x^{2}+23x+15}=\frac{\left(A+B+C\right)x^{2}+\left(8A+6B+4C\right)x+\left(15A+5B+3C\right)}{x^{3}+9x^{2}+23x+15}$$$$x^{2}+4x-1=\left(A+B+C\right)x^{2}+\left(8A+6B+4C\right)x+\left(15A+5B+3C\right)$$$$\left\{\begin{array}{c}1=A+B+C,\\4=8A+6B+4C,\\-1=15A+5B+3C\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}A=-0,5,\\B=1,\\C=0,5.\end{array}\right.\right.$$*Ответ*: 𝐴 = −0,5; B=1; C=0,5.Метод неопределенных коэффициентов можно применять и при работе с иррациональными числовыми выражениями.*Пример 16.* Вычислить$\sqrt{88-30\sqrt{7}}$.*Решение*.Воспользуемся разложением 88 − 30$\sqrt{7}$= (𝑎 + 𝑏$\sqrt{7}$)2, где 𝑎 и 𝑏 –неопределенные коэффициенты.88 − 30$\sqrt{7}$= (𝑎 + 𝑏$\sqrt{7}$)288 − 30$\sqrt{7}$=$a^{2}+2ab\sqrt{7}+7b^{2},$88 − 30$\sqrt{7}$= $\left(a^{2}+7b^{2}\right)+2ab\sqrt{7}$,$$\left\{\begin{array}{c}88=a^{2}+7b^{2}\\- 30\sqrt{7}=2ab\sqrt{7}\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}a=5,\\b=-3\end{array}\right.или\left\{\begin{array}{c}a=-5,\\b=3\end{array}\right.$$Тогда $\sqrt{88-30\sqrt{7}}=\sqrt{\left(5-3\sqrt{7}\right)^{2}}=\left|5-3\sqrt{7}\right|=3\sqrt{7}-5.$*Ответ*: $\sqrt{88-30\sqrt{7}}=3\sqrt{7}-5.$Как правило, при использовании метода неопределенных коэффициентов задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений, которые школьники привыкли решать, когда уравнений в системе столько же, сколько неизвестных. Поэтому, даже хорошо успевающие старшеклассники, как правило, теряются при встрече с задачами, подобными следующей:*Пример 17.* Числа 𝑥, 𝑦, 𝑧, 𝑡 таковы, что выполняются равенства 2𝑥 − 5𝑦 +3𝑧 − 2𝑡 = 6 и 𝑥 − 3𝑦 + 2𝑧 − 4𝑡 = 13. Найдите 11𝑥 − 26𝑦 + 15𝑧 − 2𝑡.*Решение.*Даже прочитав книжное решение (типа «умножим первое уравнение на 7, второе на –3 и сложим), школьник остается в недоумении: а как догадаться, что именно такие манипуляции надо выполнить с уравнениями? И здесь приходит на помощь метод неопределенных коэффициентов.Будем искать искомую величину в виде 11𝑥 − 26𝑦 + 15𝑧 − 2𝑡 = 𝑎 (2𝑥 − 5𝑦 + 3𝑧 − 2𝑡) + 𝑏 (𝑥 − 3𝑦 + 2𝑧 − 4𝑡),где 𝑎, 𝑏 – неопределенные коэффициенты. Составим и решим систему $$\left\{\begin{array}{c}2a+b=11,\\-5a-3b=-26,\\3a+2b=15,\\-2a-4b=-2.\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}a=7,\\b=-3.\end{array}\right.\right.$$Таким образом, 11𝑥 − 26𝑦 + 15𝑧 − 2𝑡 = 7 ∙ 6 − 3 ∙ 13 = 3.*Ответ*: 11𝑥 − 26𝑦 + 15𝑧 − 2𝑡 = 3.Метод неопределенных коэффициентов можно применять и при решении задач на делимость целых чисел, что показывает следующий пример.*Пример18*. Докажите, что если выражение 3𝑎 + 4𝑏 + 5𝑐 при некоторых целых значениях 𝑎, 𝑏, 𝑐 делится без остатка на 11, то и выражение 9𝑎 + 𝑏 + 4𝑐 при этих значениях 𝑎, 𝑏, 𝑐 делится без остатка на 11.*Решение*.Из условия следует, что 𝑛 ∙ (3𝑎 + 4𝑏 + 5𝑐) ⋮ 11 ∀𝑛∈𝑍. Кроме того, 11∙(𝑘𝑎 + 𝑙𝑏 + 𝑚𝑐) ⋮ 11 ∀𝑘, 𝑙, 𝑚∈𝑍. Поэтому необходимо искать нужную сумму в виде 9𝑎 + 𝑏 + 4𝑐 = 𝑛 ∙ (3𝑎 + 4𝑏 + 5𝑐) + 11 ∙ (𝑘𝑎 + 𝑙𝑏 + 𝑚𝑐), где 𝑛, 𝑘, 𝑙, 𝑚 –неопределенные коэффициенты. Приравнивая коэффициенты при 𝑎, 𝑏, 𝑐, получим $\left\{\begin{array}{c}3n+11k=9,\\4n+11l=1,\\5n+11m=4.\end{array}\right.$Заметим, что количество неизвестных в системе больше, чем количество уравнений; в данном случае достаточно найти одно решение в целых числах. Например, возьмем для простоты 𝑘 = 0, тогда 𝑛 = 3, 𝑙 = −1, 𝑚 =−11. Тогда 9𝑎 + 𝑏 + 4𝑐 = 3 ∙ (3𝑎 + 4𝑏 + 5𝑐) + 11 ∙ (−𝑏 − 𝑐), а это делится на 11 без остатка, что и требовалось доказать.В заключение отметим, что метод неопределенных коэффициентов является наиболее распространенным методом тождественных преобразований, использование которого в дальнейшем при обучении, например, в вузе, позволит учащимся овладеть такими сложными математическими приемами, как интегрирование рациональных дробей, нахождение суммы числового ряда, извлечение квадратного корня из комплексного числа, разложение вектора по заданному базису, нахождение частного решения неоднородного дифференциального и разностного уравнений.**Cхема Горнера**При делении многочлена $P\_{n}\left(x\right)=a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}$, расположнного по убывающим степеням *х*, на двучлен *x-α*, для нахождения значения многочлена при заданном значении переменной применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера.* Этот метод является непосредственным следствием метода неопределенных коэфициентов. Не останавливаясь на доказательстве утверждения, раскроем его практическое применение. Схема Горнера заключается в последовательном заполнении некоторой таблицы из двух строк.Пусть задан многочлен$ P\_{n}\left(x\right)=a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}$, $a\_{n}$≠0, и необходимо найти его значение при *x=b*. Количество ячеек в первой строке на единицу больше степени многочлена, т.е. *n+1*. Во второй строке ячеек на единицу больше, чем в первой строке, т.е. *n+2*. Начальная таблица имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *аn* | *аn-1*  | *…* | *а1* | *а0* |
| *b* | *аn* |  |  |  |  |

Уже записанные значения в ячейках не меняются, а пустые клетки во второй строке заполняются последовательно слева направо по следующему правилу: в пустую клетку записывается число, равное сумме произведения числа, стоящего в ячейке слева и числа *b*, и значения, стоящего над пустой клеткой. Например, в третьей клетке второй строки будет стоять число $a\_{n}∙b+a\_{n-1}$.В итоге, после *n* шагов, во второй строке в крайней клетке справа будет стоять значение многочлена при *x=b*.*Пример 19.* Разделить 5*x*4 + 5*x*3 + *x*2 − 11 на *x* − 1, используя схему Горнера.Решение. Составим таблицу из двух строк: в первой строке запишем коэффициенты многочлена 5*x*4 + 5*x*3 + *x*2 − 11, расположенные по убыванию степеней переменной *x*. Заметьте, что данный многочлен не содержит *x* в первой степени, т.е. коэффициент перед *x* в первой степени равен 0. Так как мы делим на *x* − 1, то во второй строке запишем единицу:gornerНачнем заполнять пустые ячейки во второй строке. Во вторую ячейку второй строки запишем число 5, просто перенеся его из соответствующей ячейки первой строки:gornerСледующую ячейку заполним по такому принципу: 1⋅5+5=10:gornerАналогично заполним и четвертую ячейку второй строки: 1⋅10+1=11:gornerДля пятой ячейки получим: 1⋅11+0=11:gornerИ, наконец, для последней, шестой ячейки, имеем: 1⋅11+(−11)=0:gornerЗадача решена, осталось только записать ответ:gornerКак видим, числа, расположенные во второй строке (между единицей и нулём), есть коэффициенты многочлена, полученного после деления 5*x*4+5*x*3+*x*2−11 на*x*−1. Естественно, что так как степень исходного многочлена 5*x*4+5*x*3+*x*2−11 равнялась четырём, то степень полученного многочлена 5*x*3+10*x*2+11*x*+11 на единицу меньше, т.е. равна трём. Последнее число во второй строке (ноль) означает остаток от деления многочлена 5*x*4+5*x*3+*x*2−11 на *x*−1.В нашем случае остаток равен нулю, т.е. многочлены делятся нацело. Этот результат ещё можно охарактеризовать так: значение многочлена 5*x*4+5*x*3+*x*2−11 при *x*=1 равно нулю.Можно вывод и в такой форме: так как значение многочлена 5*x*4+5*x*3+*x*2−11 при *x*=1 равно нулю, то единица является корнем многочлена 5*x*4+5*x*3+*x*2−11.**Итоговый тест по теме «Многочлены»*****Вариант 1***1. Выберите верные утверждения:1. Сумма многочленов степени п есть многочлен степени не выше п;
2. Разность многочленов степени п есть многочлен степени п;
3. Произведение многочленов степени п есть многочлен степени не выше п;
4. Произведение многочленов степени п есть многочлен степени 2п.

Ответ: 1), 4).2. Найдите остаток от деления многочлена *х3–7х – 6* на двучлен *х + 1*.Ответ: 0.3. Найдите сумму целых корней многочлена *3х4– 5х2+ 2*.Ответ: 0.4. Найдите число, на которое без остатка делится выражение *175 – 125*.Ответ: 5.5. Используя схему Горнера, найдите коэффициент при *х*3 в многочлене, полученном в результате деления многочлена *х5– 2х4+ 3х3– 7х2+ 2х – 1* на двучлен *х – 2*.Ответ: 0.6. При каких значениях параметра *а* многочлен *(а2– 4)х4– 2х3+ (2а – 1)х – 4* будет:1. приведенным;
2. многочленом четвертой степени;
3. многочленом третьей степени;
4. принимать одинаковые значения в точках *х* = 2 и *х*= –2.

Ответ: 1)  *a* = ±$\sqrt{5}$;2) *a* ≠ ±2; 3) *a* = ±2; 4) *a* = 4,5.**«Многочлены»*****Вариант 2***1. Выберите верные утверждения:1) Произведение многочленов степени *п* есть многочлен степени не выше *п*;2) Произведение многочленов степени *m и п* есть многочлен степени *mп*;3) Разность многочленов степени *п* есть многочлен степени не выше *п*;4) Сумма многочленов степени *п* есть многочлен степени *п*;Ответ 3), 4).2. Найдите остаток от деления многочлена *х3 – 19х + 30* на двучлен *х – 2*.Ответ: 0.3. Найдите сумму целых корней многочлена *2х4 – 5х2 + 3*.Ответ: 0.4. Найдите число, на которое без остатка делится выражение *217 + 27*.Ответ: 23.5. Используя схему Горнера, найдите коэффициент при *х*3 в многочлене, полученном в результате деления многочлена *3х5 + 5х4 + 11х2 + 2х* на двучлен *х – 1*.Ответ: 8.6. При каких значениях параметра *а* многочлен *(а2– 1)х4 +2х3+(а – 1)х – 3* будет:1) приведенным;2) многочленом четвертой степени;3) многочленом третьей степени;4) принимать одинаковые значения в точках *х* = 1 и *х*= –1.Ответ: 1)  *a* = ±$\sqrt{2}$;2) *a* ≠ ±1; 3) *a* = ±1; 4) *a* = –1*4б* |
| **Список литературы и других источников по теме** | 1. Алгебра 7, 8, 9 класс (углубленный уровень) (в 2 частях) / Мордкович А.Г. и др. под ред. Мордковича А.Г. – ООО "ИОЦ МНЕМОЗИНА"
2. Алгебра 7, 8, 9 класс (углубленный уровень) / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.,Нешков К.И. и др. – "Издательство "Просвещение".
3. Алгебра и начала анализа. 8–11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Звавич Л.И. и др. – М., Дрофа, 1999. – 352 с.
4. Алгебра и начала математического анализа 10, 11 класс (базовый и углубленный уровни) / Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. – АО "Издательство "Просвещение".
5. Алгебра и начала математического анализа. 10, 11 класс (базовый и углубленный уровни) / Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др. – АО "Издательство "Просвещение".
6. Выгодский, М.Я. Справочник по математике. – М., АСТ, 2010. – 1055 с.
7. Галицкий, М.Л. Сборник задач по алгебре. Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 2008. – 301 с.
8. Дидактические материалы Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 10 кл. / Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. – М.: Просвещение, 2017.
9. За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. 10-11 класс / Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с.
10. Задания по математике для подготовки к письменному экзамену в 9 классе /Звавич Л.И., Аверьянов Д.И., Пигарев Б.П., Трушанина Т.Н. – М., Просвещение, 2007. – 112 с.
11. Иванов А.А., Иванов А.П. Тематические тесты для систематизации знаний по математике. ч.1 – М., Физматкнига, 2006. – 176 с.
12. Иванов А.А., Иванов А.П. Тематические тесты для систематизации знаний по математике. ч.2 – М., Физматкнига, 2006. – 176 с.
13. Иванов А.П. Тесты и контрольные работы по математике. Учебное пособие. – М., Физматкнига, 2008. – 304 с.
14. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10, 11 класс / Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др. – АО "Издательство "Просвещение".
15. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10, 11 класс / Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. – АО "Издательство "Просвещение".
16. Савин, А.П. Энциклопедический словарь юного математика. – М., Педагогика, 1985. – 352 с.
17. Чулков, П.В. Уравнения и неравенства в школьном курсе математик. Лекции 1–4 – М. : Первое сентября, 2006. – 88 с.
18. Чулков, П.В. Уравнения и неравенства в школьном курсе математик. Лекции 5–8. – М. : Первое сентября, 2009. – 84 с.
 |
| **Автор-составитель** | В.А. Шуклина, старший преподаватель кафедры математического образования, информатики и ИКТ АИРО имени А.М. Топорова |