**Консультация**

**с использованием информационно-телекоммуникационных технологий**

**Введение**

|  |  |
| --- | --- |
| **Наименование разработки** | **Нестандартные способы решения квадратных уравнений** |
| **Целевая группа** | Учителя математики |
| **Область применения**  **разработки** | Обеспечение выполнения плана мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2021 году |

**1. Основания для разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| **Документ**  **(документы),**  **на основании**  **которых**  **выполняется**  **работа** | План мероприятий по реализации в Алтайском крае проекта «Мобильная сеть учителей математики» в 2021 году.  План работы мобильной сети учителей математики Алтайского края |

**2. Назначение разработки**

|  |  |
| --- | --- |
| **Цель** | Содействие развитию профессиональной (предметной) компетентности учителей математики – формирование конкретных знаний, умений и навыков в решении уравнений различными способами |

**Нестандартные способы решения квадратных уравнений**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **СТРУКТУРНЫЕ**  **КОМПОНЕНТЫ**  **КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ** | **СОДЕРЖАНИЕ** |
| **1** | **Ключевые слова** | Квадратное уравнение,  приведенное квадратное уравнение, дискриминант квадратного уравнения, корень уравнения, графический способ решения уравнения, способ «переброски» коэффициентов,  свойства коэффициентов квадратного уравнения, решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки, решение с помощью номограммы, геометрический способ |
| **2** | **Аннотация к содержанию**  **консультации** | Содержание консультации раскрывает опыт работы учителя математики по формированию и развитию у обучающихся умений решать квадратные уравнения в рамках урока, а также внеурочной деятельности |
| **3** | **Запрос на**  **консультирование** | Как научить учащихся решать квадратные уравнения, используя различные, в том числе нестандартные методы? |

**Нестандартные способы решения квадратных уравнений**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| "Человеку, изучающему алгебру,  часто полезно решить одну и ту же  задачу тремя различными способами,  чем решать три-четыре различные задачи.  Решая одну задачу различными  способами, можно путем сравнения  выяснить, какой из них короче, эффективнее.  Так вырабатывается опыт".  У.У. Сойер  Квадратные уравнения – это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств. Многие практические задачи решаются с их помощью. Например, квадратное уравнение позволяет рассчитать тормозной путь автомобиля, мощность ракеты для вывода на орбиту космического корабля, траектории движения различных физических объектов – от элементарных частиц до звёзд.  В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие приёмы решения этих уравнений, которые не отражены в школьных учебниках математики. Считаю, что применение разнообразных способов решения поможет сэкономить время и значительно повысить эффективность и качество решения квадратных уравнений.  Анализ учебников алгебры за 8 класс разных авторов позволяет сделать вывод, что самыми распространенными способами решения квадратных уравнений являются способы решения по формуле, то есть через дискриминант и по теореме Виета. Такие способы, как выделение квадрата двучлена, решение уравнений с четным коэффициентом при *х*, рассматриваются в каждом учебнике алгебры. Разложение левой части уравнения на множители и графический способ решения квадратных уравнений изучается в учебнике А.Г. Мордковича. В учебнике, автором которого является Г.В. Дорофеев, учащихся знакомят с интересным способом решения уравнений с целыми коэффициентами, этот способ автор поместил в раздел «Для тех, кому интересно».  Я обратилась за помощью к дополнительной литературе и к моему удивлению начала находить один способ решения за другим, которые ранее мне не были известны. Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них по-своему уникален. Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на контрольных работах и экзаменах.  **Стандартные методы (изучаются в учебниках):**   * *решение квадратных уравнений по формулам,* * *решение с использованием формул для четного коэффициента,* * *теорема Виета,* * *разложение левой части на множители,* * *выделение полного квадрата,* * *графический метод.*   **Нестандартные методы:**   * *решение способом «переброски» коэффициентов,* * *свойства коэффициентов квадратного уравнения,* * *Султанов способ,* * *решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки,* * *решение с помощью номограммы,* * *геометрический способ.*   ***1. Решение уравнений способом «переброски»*** ***старшего коэффициента***  Решим уравнение *ах2+bх + с = 0.* Умножив обе части уравнения на *а*, получим  *а2х2 +аbх + ас = 0.* Пусть *ах = у.* Тогда получим уравнение с новой переменной  *у2 +bу + с = 0.* Его корни *у1 и у2*. Окончательно:, .  При этом способе коэффициент ***а*** умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски». Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета, и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.  Пример: *2х2 – 11х + 15 = 0*  Перебросим коэффициент *а* = 2 к свободному члену и получим уравнение:  *у2 – 11у + 30 = 0*, из которого по теореме Виета *у1= 5, у2 = 6.*  Тогда корнями исходного уравнения будут *x1* = 5 : 2 = 2,5, *х2* = 6 : 2 = 3.  Ответ: 2,5; 3.  Пример: *3х2 + 4х – 7=0*.  «Перебросим» коэффициент 3 к свободному члену, в результате получим уравнение *у2 + 4у – 21 = 0.* Согласно теореме Виета *у1= – 7, у2 = 3*  *х1 = ,   x2 =*   Ответ: *х*1 = , *x*2 = 1 .  **Вывод:** Метод хорош для квадратных уравнений с «удобными» коэффициентами. В некоторых случаях позволяет решить квадратное уравнение устно.  ***2. Свойства коэффициентов квадратного уравнения ах2 + bх + с = 0***  1. Если *a + b + c = 0*, то *х1 = 1, х2 =*  2. Если *а + с = b,* то *х1 = –1, х2 = –*  3. Если *b = a2 + 1 и c = a*, то *x1 = – a, x2= –*  4. Если *b = – ( a2 + 1 ) и c = a*, то *x1 = a, x2=*  5. Если *b = a2–1, c = – a*, то *x1 = – a, x2 =*  6. Если *b = – ( a2 –1), c = – a,* то *x1 = a, x2 = –*  7. Если *а + в = с*, то корней нет.  Пример: Решить уравнение *839 x2 – 448 x – 391 = 0*  839 – 448 – 391 = 0, то *x1 = 1, x2 = –839/391*  Ответ: – 839/391; 1.  Пример: Решим уравнение *6 х2 + 37 х + 6 = 0.*  Так как *b = a2 + 1, c = a*, то *x1 = – a, x2 = – 1/а*  37 = 36 + 1, то *x1 = – 6, x2 = –1/6*  Ответ: – 6; – 1/6.  **Вывод:** Данный способ удобно применять к квадратным уравнениям с большими коэффициентами и можно решить только те уравнения, у которых коэффициенты удовлетворяют определенным условиям.  ***3. Султанов метод***  Решим уравнение *4х2 +35х – 9=0.*  Разделим всё уравнение на *х* и перенесем свободный член в другую часть:  *4х+35= 9/х.*  Найдем делители числа 9: -1; 1; -3; 3; -9 ;9. Проверяем каждый из них. Быстро определяем, что подходит число -9. Это первый корень.  Второй корень определяем так: ***с : х1 : а.***  –9 : (–9) : 4=1/4.  Ответ: –9; 1/4.  Пример: Решить уравнение *2х2 + 21х – 11 = 0.*  *2х + 21 = 11/х*  Делители числа 11: –1; 1; -11; 11.  Проверяем каждый из них. Подходит число –11.  Второй корень: –11 : (– 11) : 2 = 0,5  Ответ: 0,5; –11.  ***4. Решение при помощи циркуля и линейки***  Предлагаю следующий способ нахождения корней квадратного уравнения  ***ах2 + bх + с = 0*** с помощью циркуля и линейки.   |  |  | | --- | --- | | Данный способ заключается в том, чтобы при нахождении корней уравнения *ах2 +bх + с = 0* отметить в системе координат точки  *S* () и *А* (0;1) и провести окружность с центром в точке *S* и радиусом *SA*. Абсциссы точек пересечения с осью *Ох* есть корни исходного уравнения. |  | | Возможны три случая: | | | 1) Радиус окружности больше ординаты центра *SA*>*SB* или *R* > , окружность пересекает ось *Ох* в двух точках (*x1*; 0) и (*х2*; 0) , где *x1* и *x2* корни исходного уравнения. |  | | 2) Радиус окружности равен ординате  центра *SA*=*SB* или *R*=, окружность пересекает ось *Ох* в одной точке (*x*1; 0), где *x1* – корень исходного уравнения. |  | | 3) Радиус окружности меньше ординаты  центра *SA*<*SB* или *R*< , окружность не имеет общих точек с осью *Ох*. В этом случае исходное  уравнение не имеет корней. |  | | Пример: *2х2 + 3х + 1 = 0*  Определим координаты центра окружности по формулам:  ;, то есть *S*. Проведем окружность радиуса *SA,* где *А* (0;1). Найдем по рисунку абсциссы точек пересечения с осью *Ох* и проверим их. –1; –0,5 являются корнями уравнения *2х2 + 3х + 1 = 0*.  Ответ: –1; –0,5. |  |   **Вывод:** с помощью этого способа решения квадратного уравнения легко провести исследование его корней на знак. Но, очевидно, что этот красивый способ практически не применяется из-за геометрических построений и последующей проверки результатов решения.  **5*. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы***  Номограмма – это особый чертеж, рисунок, с помощью которого можно, не производя вычислений, получить решения вычислительных задач. Это старый и в настоящее время забытый способ решения квадратных уравнений (Брадис В.М.Четырехзначные математические таблицы для средней школы, с. 83).  Номограмма для решения уравнения *z2 + pz + q = 0* позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.    **Примеры.**  **1)** Для уравнения *z2 – 9z + 8 = 0* номограмма дает корни *z1 = 8,0* и *z2 = 1,0.*  Ответ: 8; 1.  **2)** Решим с помощью номограммы уравнение *2z2 – 9z + 4 = 0.*  Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение  *z2 – 4,5z + 2 = 0.*  Номограмма дает корни *z*1= 4 и *z*2= 0,5.  Ответ: 4; 0,5.  Приведем фрагмент комментария к таблице XXII из «Четырехзначных таблиц» Брадиса:      Рассмотрим еще ряд примеров решения квадратных уравнений с использованием номограммы:  *z2 – 7z +6 = 0 z2 – 2z + 3 =* 0 *z2 – z – 6 = 0*  *p= –7 q=6* *p = –2 q = 3* *p = –1 q = – 6*    Ответ: 1; 6. Ответ: нет корней. *z*1=3,*z*2 = –(–1) – 3= –2.  Ответ: –2; 3.  **6*. Геометрический способ решения квадратных уравнений***  В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.  Например, как древние греки решали уравнение *у2 + 6у – 16 = 0*?  Решение представлено на рисунке, где *y2+ 6у = 16* или *у2 + 6у + 9 = 16 + 9:*    Выражения *у2 + 6у + 9* и *16 + 9* геометрически представляют собой площадь одного и того же квадрата, а исходное уравнение и *у2 + 6у – 16 + 9 – 9 = 0* – одно и то же уравнение. Откуда и получаем, что *у + 3 = ± 5*, или *у1 = 2, у2 = – 8.*  Решим квадратное уравнение ***2х2 +7х –9 = 0***различными способами:   |  |  | | --- | --- | | 1. Разложение левой части уравнения на множители:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  2*х*2 +9*х* – 2*х* – 9 =0  (2*х*2 +9*х*) – (2*х* + 9) = 0  *х*(2*х* +9) – (2*х* +9) = 0  (*х* – 1)(2*х* + 9) = 0  *х* –1 = 0 или 2*х* + 9 = 0  *х* = 1 *х* = –4,5  Ответ: –4,5; 1. | 2. Выделение полного квадрата:  2*х*2+ 7*х* – 9 = 0  Разделив левую и правую части  уравнения на 2, получим:  *х*2 + *х* – = 0  *х*2+ 2··*х* +()2 =()2+  (*х* +)2 =  *х*+= – или *х* +=  *х* = – 4,5 *х* = 1  Ответ: –4,5; 1 | | 3. По формуле корней квадратного уравнения:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  *a* = 2, *b* = 7, *c* = –9  *D* = 49 + 72 = 121  *D* > 0 (2 корня)      Ответ: –4,5; 1. | 4. По теореме Виета:  2х2+ 7х – 9 = 0  Разделив левую и правую части уравнения на 2, получим:  *х*2 + *х* – = 0  *x*1 + *x*2 =  *x*1∙*x*2 = –  *х*1 = – 4,5 *х*2 = 1  Ответ: –4,5; 1. | | 5. Способ «переброски»:  2*х*2+ 7*х* – 9 = 0  Перебросим коэффициент *а* = 2 к свободному члену и получим уравнение  *y*2 +7*у* –18 = 0, из которого по теореме Виета *у1*= 2, *у2* = – 9.  Тогда корнями исходного уравнения будут *х*1= 2/2=1, *x2*= –9/2= –4,5  Ответ: –4,5; 1. | 6. По свойству коэффициентов:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  *a* = 2, *b* = 7, *c* = –9  Так как *a + b+ c* = 2 + 7 – 9 = 0,  то *х*1=1, *х*2 = –4,5  Ответ: –4,5; 1. | | *7.* Графический способ:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Запишем уравнение в виде  2*х*2 = 7*х* + 9  и в одной системе координат построим графики функций  *у* = 2*х*2  и *у* = 7*х* + 9    Ответ: –4,5; 1. | *8.* С помощью циркуля и линейки:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Определим координаты центра окружности по формулам:    .  *S* ( )  Проведем окружность радиуса *SA,* где *А*(0;1).    Ответ: –4,5; 1. | | *9.* С помощью номограммы:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Представим уравнение в виде:  *х*2+ 3,5*х* – 4,5 =0    Номограмма дает положительный корень  *х*1 = 1, отрицательный корень  *х*2 = – *р* – *х*1 = –3,5 –1 = –4,5  Ответ: –4,5; 1. | *10.* Геометрический способ:  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Представим уравнение в виде:  *х*2 + *х* =    Площадь полученного квадрата:  *S* = (*х* +)2  Так как ,  то *S* = (*х* + )2 =  Таким образом, получили  уравнение:  (*x* + )2 =  *х*+= – или  *х* +=  *х* = – 4,5 *х* = 1  Ответ: – 4,5; 1. | | *11.* Султанов метод  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Свободный член перенесем в правую часть и разделим все уравнение на х  2*х* + 7 = 9/*х*  Найдем делители числа 9:  ±1; ±3; ±9  Проверяем каждый из них. Быстро находим, что подходит число 1, это и есть первый корень.  Второй корень определяем так:  *с: х1 : а*  – 9: 1 : 2 = – 4,5  Ответ: – 4,5; 1. | *12.* По формуле четного коэффициента  2*х*2 + 7*х* – 9 = 0  Умножим все уравнение на 2.  4*х*2 + 14*х* – 18 = 0  Применяем формулу  , *k =*    *x*1 = 1, *х*2 = –4,5  Ответ: – 4,5; 1 |   Следует отметить, что не все способы удобны для решения, но каждый из них по-своему уникален, имеет свои «плюсы» и «минусы».   |  |  | | --- | --- | | Способ решения квадратного уравнения | Достоинства, недостатки способа | | Решение квадратных уравнений с использованием теоремы Виета | Достаточно легкий способ, дает возможность сразу увидеть корни уравнения.  Легко можно найти только целые корни | | Решение квадратных уравнений способом переброски | За минимальное количество действий можно найти корни уравнения. Применяется совместно с теоремой Виета.  Легко можно отыскать только целые корни | | Свойства коэффициентов квадратного уравнения | Не требует особых усилий. Подходит только к некоторым уравнениям | | Графическое решение квадратных уравнений  Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки | Наглядный способ.  Могут быть неточности при построении графиков и определении корней уравнения | | Решение квадратных уравнений с помощью номограммы | Наглядный способ, прост в применении.  Не всегда под рукой имеется номограмма | | Геометрический способ решения квадратных уравнений | Наглядный способ, похож на способ выделения полного квадрата |   Так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они могут заинтересовать увлекающихся математикой учеников. Предлагаемый материал учителя математики могут использовать на уроках, при проведении внеурочных занятий, также при подготовке выпускников к сдаче ОГЭ и ЕГЭ. | |
| **Список литературы и**  **других источников по**  **теме** | 1. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М. : Наука, 1987. 2. Математика. 8-9 классы: сборник электронных курсов / В.Н. Студенецкая, Л.С. Сагателова. – М. : Учитель, 2006. 3. Математический калейдоскоп / В.Г. Штейнгауз. – М. : Бюро «Квантум», 2005. 4. Окунев, А.К. Квадратные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. – М. : Просвещение, 1972. 5. Пресман, А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки // Квант. – 1972. – № 4. – С. 34. 6. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М.Л. Галицкий, М. Гольдман, Л.И. Звавич. – 4-е изд. – М. : Просвещение, 1997. 7. Справочник по математике для средней школы / А.Г. Цыпкин. – М. : Наука, 1980. 8. Уравнения. Способы решения. Обобщение материала при подготовке к ОГЭ: методические рекомендации / Н.Г. Ремизова. – пос. Рассвет: изд-во АДЕККК МО РФ. – 2017. – 12 с. 9. Четырехзначные математические таблицы для средней школы / В.М. Брадис. – М. : Просвещение, 1990. 10. Энциклопедический словарь юного математика. – М. : Педагогика, 1985. |
| **Автор-составитель** | Шорохова Ольга Михайловна, учитель математики МБОУ «Первомайская СОШ» Павловского района Алтайского края, тьютор Мобильной сети учителей математики Алтайского края |