Графический метод решения задач с параметрами
Теоретическая часть

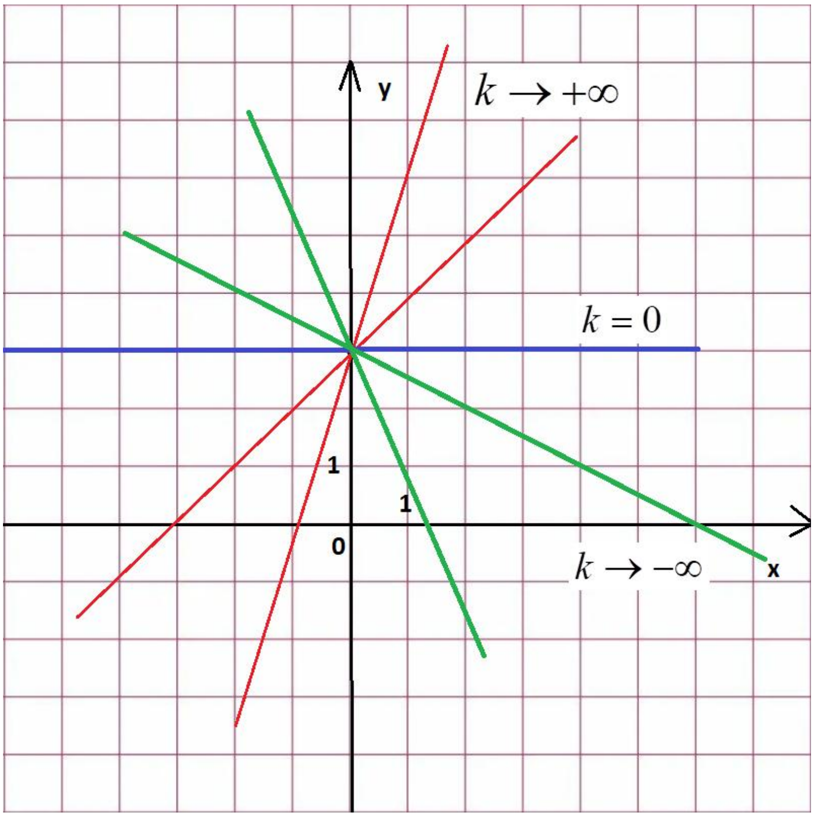
1. Прямая

$y = kx + m$

k **- параметр (поворот)**

Пример:

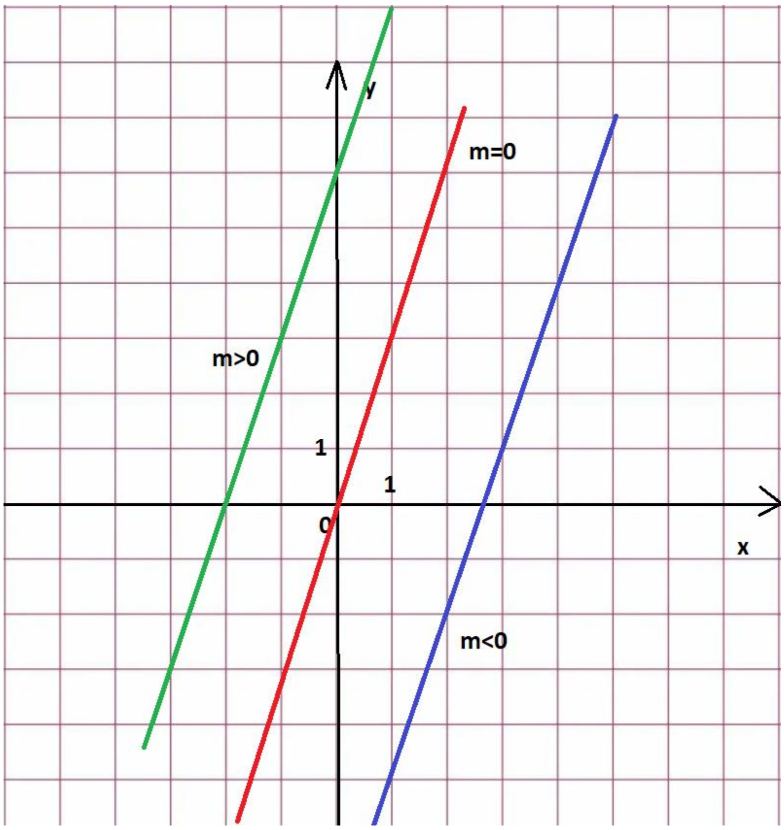
$y = kx + 3$



m **– параметр (параллельный перенос)**

Пример:

$y = 3x + m$



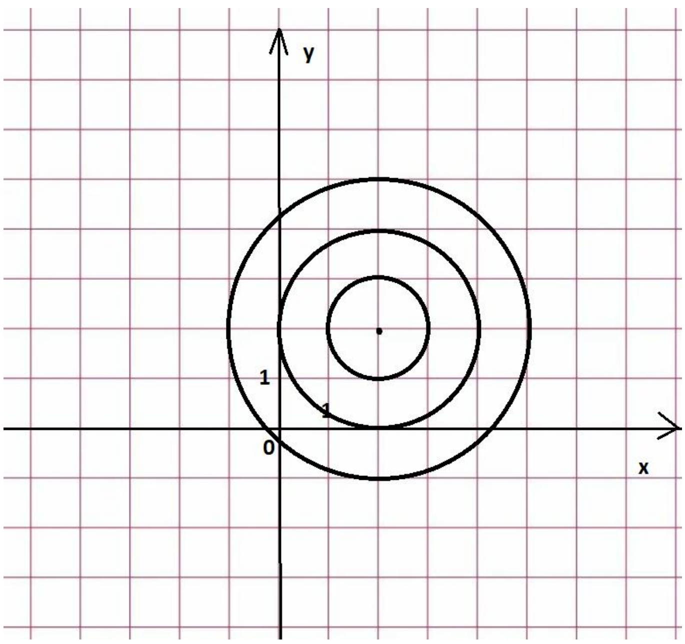
2. Уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$(x_0; y_0)$ – центр окружности

r – радиус окружности

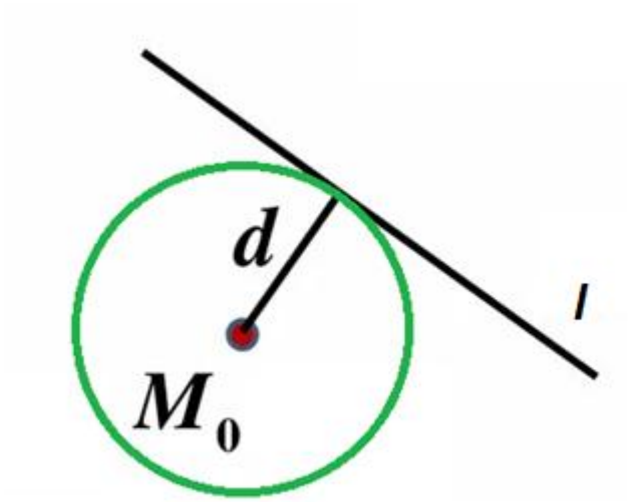
а) r =a – параметр



Используется формула расстояния от точки прямой.

Расстояние от **d** до точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой ***l***: $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

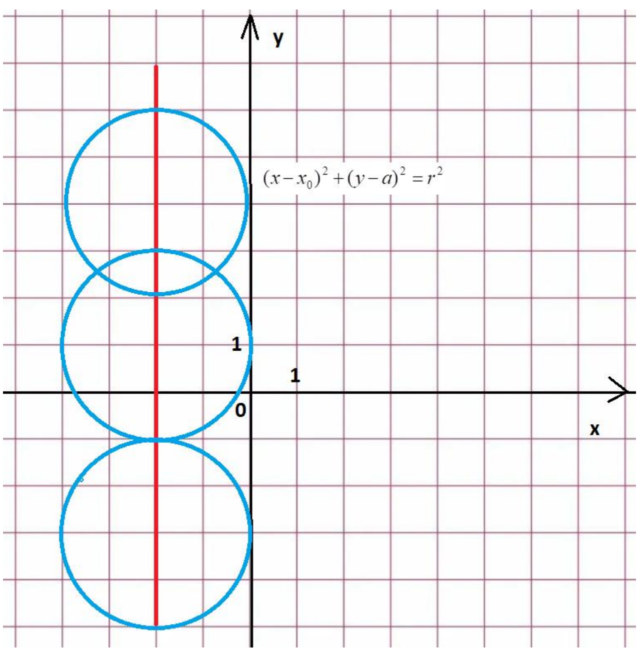


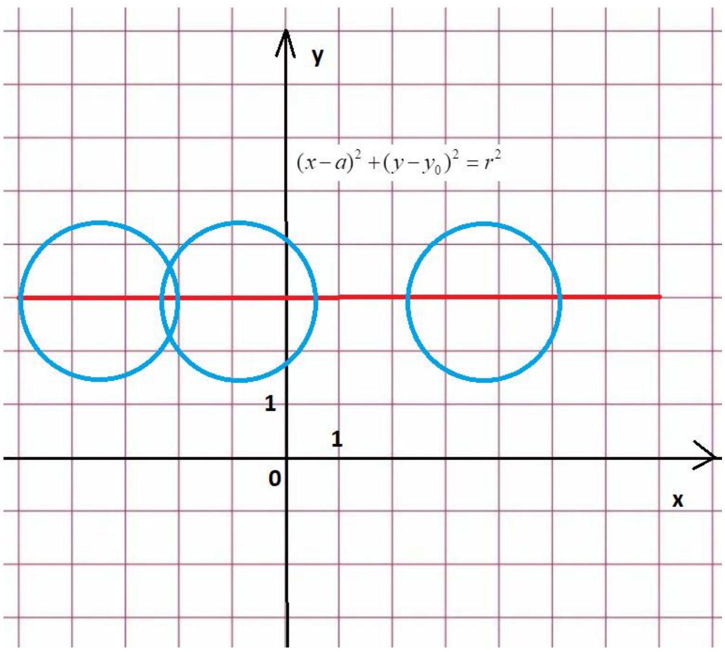
б) $(x_0; y_0)$ **– центр окружности параметр**

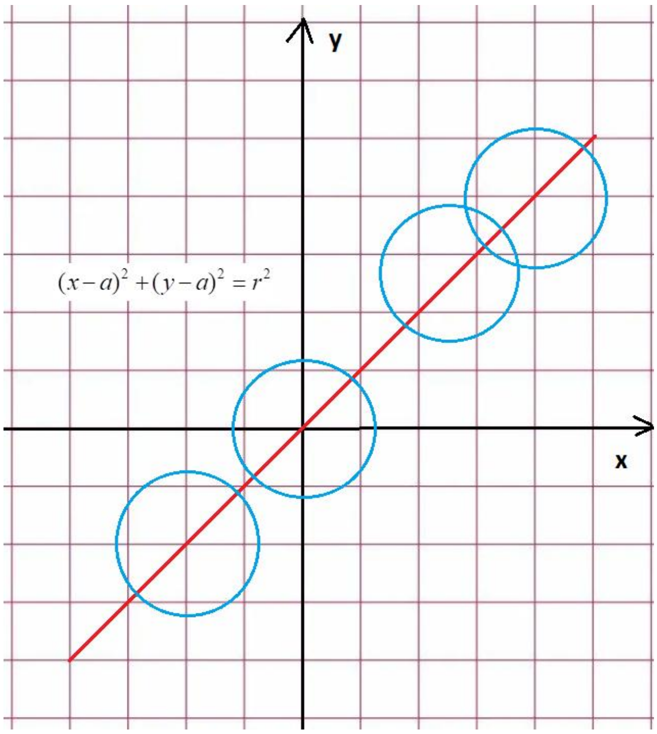
$(x - x_0)^2 + (y - a)^2 = r^2$ – центр $(x_0; a)$ лежит на прямой x=a

$(x - a)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ – центр $(a; y_0)$ лежит на прямой y=a

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2$ – центр $(a; a)$ лежит на прямой y=x







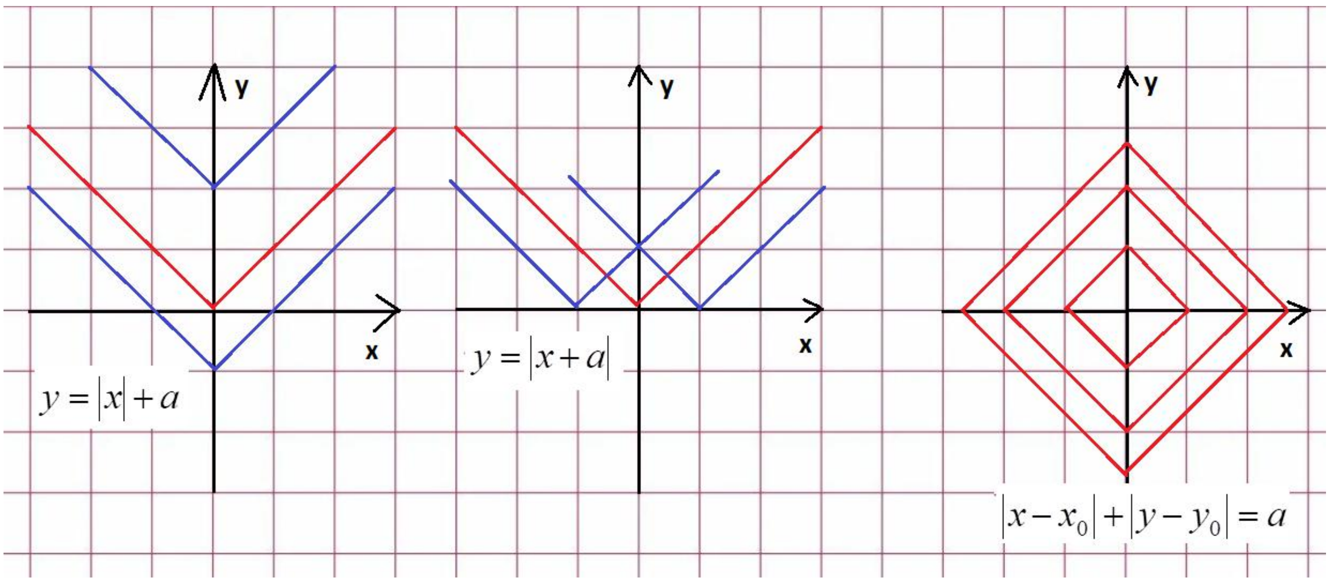
2. Модуль

$$y=|x+a|$$

$$y=|x|+a$$

$$y=||x|+a|$$

$$|x-x_0|+|y-y_0|=a$$



Практическая часть

1. При каких значениях параметра a уравнение имеет два решения $|x-2|-|x+1|=2-x+a$.

Ответ: a={-3,0}.

2. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $\left|\frac{1-2x}{x+1}\right|=a$.

Ответ: нет решений при a<0, одно решение при a={0,2}, два решения при $a\in(0,2)\cup(2,+\infty)$.

3. При каких значениях параметра а, уравнение имеет единственное решение. $\frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}-a=0$.

Ответ: a={-6,25;-4;6}.

4. При каких значениях параметра k уравнение имеет единственное решение $kx-\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2}=0$.

Ответ: $k\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

5. При каких значениях параметра k уравнение не имеет решение $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}=kx$.

Ответ: $k=\left\{-\frac{1}{16},0,\frac{1}{16}\right\}$

6. Сколько решений имеет система в зависимости от параметра a.

$$\begin{cases}|x|+|y|=a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

Ответ: нет решений при $\left[\begin{array}{l}a<1,\\ a>\sqrt{2}\end{array}\right.$, четыре решения при $\left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=\sqrt{2}\end{array}\right.$, восемь решений при $1<a<\sqrt{2}$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}2x^2+2y^2=5xy,\\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Ответ: $a=\left\{-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right\}$

8. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-2x+y^2-4y=2\,|\,x+2y-5\,|, \\ 2x-y=a \end{cases}$ имеет более двух решений.

Ответ: $-5\sqrt{2}<a\le -5,\ 5<a\le 5\sqrt{2}$.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0. \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in(-6{,}1]\cup\{8\}\cup[9{,}10)$.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0, \\ y=ax. \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\{1\}.$.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{4x-3}\cdot\ln(5x-a)=\sqrt{4x-3}\cdot\ln(6x+a)$ имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{9}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[-\dfrac{3}{8};\dfrac{15}{4}\right).$

Расположение корней квадратного трехчлена относительно данных чисел

1. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $ax^2+(a+3)x-3a=0$ больше -1, а другой меньше 1.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4cosx-3-a)cosx-2{,}5\ cos2x+1{,}5=0$ имеет хотя бы один корень.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x^2+|x|)(x^2+5|x|+6)+1}=3|x|-3ax-a^2+1$ имеет корн как большие -3, так и меньшие -3.

4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)cosx+4}{sin^2x+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{5a}{a-3}7^{|x|}=49^{|x|}+\frac{6a+7}{a-3}$ имеет ровно 2 разных решения.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{5^x-a}+\frac{a-2}{\sqrt{5^x-a}}=1$ имеет ровно два различных корня.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{a-(a^2-2a-3)sinx+4}{0{,}5cos2x+a^2+1{,}5}<1$ содержит отрезок $\left[-2\pi;-\frac{7\pi}{6}\right]$.

   Ответ: $\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$

8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{4a}{a-6}3^{|x|}=9^{|x|}+\frac{3a+4}{a-6}$ имеет ровно 2 разных решения.

   Ответ: $\{-12\}\cup(-6;+\infty)$

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a}{25^x}-a=2-\frac{25^{2x}}{5}$ имеет ровно 2 разных решения, хотя бы один из которых не меньше 0,5.

   Ответ: $[-2{,}49;-2)$

10. Найти все значения x, при каждом из которых неравенство $(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$ выполняется хотя бы при одном $a\in[-1;2]$.

    Ответ: $(-\infty;-2]\cup[0;1)\cup(1;+\infty)$