# Передовые подходы в преподавании математики

(из опыта работы учителей математики Алтайского края)

Барнаул 2024

**УДК 372.851**
**ББК 74.26**
**П 27**

Министерство образования и науки Алтайского края
КАУ ДПО «Алтайский институт развития образования
имени Адриана Митрофановича Топорова»
АНО «Центр развития инновационных проектов и финансовой грамотности»

*Пособие подготовлено при поддержке фонда Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества в рамках гранта № 24-1-009002 «Мобильная сеть учителей математики – потенциал развития успешности обучающихся»*

**Рецензент:** Райских Т.Н., заместитель директора по научной и инновационной работе КАУ ДПО «АИРО имени А.М. Топорова», директор АНО «ЦРИПиФГ», канд. пед. наук, доцент

**П 27** Передовые подходы в преподавании математики (из опыта работы учителей математики Алтайского края) : сборник материалов / под ред. М.А. Гончаровой, Н.В. Решетниковой. – Барнаул: ООО «Азбука», 2024. – 167 с.

В пособии представлен опыт тьюторов Мобильной сети учителей математики Алтайского края по вопросам обучения избранным темам алгебры, геометрии, алгебры и начал анализа, а также по вопросам формирования функциональной грамотности при обучении школьников математике. В статьях учителями, как правило, приводится краткая теоретическая справка по той или иной математической теме и раскрывается ее методический аспект, приводятся соответствующие системы упражнений, авторские наборы заданий, примеры использования образовательных технологий и др.

Издание адресовано учителям математики, педагогам, руководителям методических объединений по математике разного уровня, методистам, специалистам методических служб Алтайского края и других субъектов РФ, а также студентам вузов, готовящихся стать учителями математики на уровне основного и среднего общего образования, преподавателям, работающим в системе повышения квалификации.

**ISBN 978-5-6052469-7-8**

## Оглавление

# ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных условий, которое помогает учителю успешно осуществлять педагогическую деятельность является профессиональная поддержка, ориентированная, в конечном итоге, на решение приоритетной задачи государственной политики в области образования – достижение высокого качества образования вообще и математического, в частности.

В ходе проектирования модели педагогической поддержки учителей математики Алтайского края учитывались не только результаты исследований предметно-методических компетенций педагогов (федерального, регионального уровней), а также тот факт, что более половины образовательных организаций региона составляют малокомплектные сельские школы, которые являются филиалами территориально отдаленных крупных сельских школ. Учителю, находящемуся, в силу независящих от него обстоятельств, в замкнутом профессиональном социуме и на удалённом расстоянии от муниципальных методических служб, зачастую сложно решать в одиночку постоянно возникающие профессиональные проблемы.

С 2020 года в Алтайском крае реализуется модель педагогической поддержки в виде Мобильной сети учителей математики Алтайского края (далее – МС), главной целью которой является обеспечение качества школьного математического образования в регионе. Педагогическое сообщество учителей математики «Мобильная сеть» служит инструментом непрерывного профессионального самосовершенствования; развития тьюторской, экспертной позиции учителя, позволяющей оказывать помощь

педагогам-коллегам в преодолении затруднений, с которыми они встречаются в реализации обучения математике.

Среди ключевых задач МС на сегодняшний день можно выделить следующие:

- поддерживать функционирование действующего сетевого профессионального сообщества учителей математики для обеспечения своевременного решения профессиональных затруднений, условий непрерывного профессионального самосовершенствования, обобщения и распространения успешного педагогического опыта;
- развивать у учителей математики тьюторскую позицию;
- продолжить работу информационно-методической площадки для профессионального общения/ взаимодействия участников МС;
- организовывать методические сборы, семинары, практикумы, мастер-классы, образовательные события и др., ориентированные на ликвидацию точечных профессиональных затруднений и совершенствование предметных, методических и технологических компетенций.

На сегодняшний день, сообщество МС учителей математики Алтайского края является активно действующей информационно-методической площадкой для профессионального сетевого общения/взаимодействия. Если первоначально МС включала около 15 школьных учителей-тьюторов, то к настоящему времени в сообществе сформировалась команда активных тьюторов в количестве 32 педагогов из разных районов Алтайского края. Они делятся успешным педагогическим опытом, осуществляя методическую поддержку учителей математики в регионе через проведение образовательных событий, педагогических

марафонов, семинаров, практикумов, сетевых консультаций, индивидуальных и групповых консультаций, видеоконсультаций, мастер-классов, вебинаров, онлайн-мастерских, тренингов, педагогических школ, открытых решебников, стажерских практик, круглых столов и др.

С 2023 года тьюторы систематически проводят интерактивные встречи, в том числе, в рамках курсовых мероприятий и стажировок, организуемых профильной кафедрой АИРО им. А.М. Топорова. Содержательная часть работы МС охватывает актуальные для учителей вопросы, например: создание рабочих программ; методические подходы к обучению школьников избранным темам учебных курсов «Алгебра», «Геометрия», «Алгебра и начала математического анализа», «Вероятность и статистика»; применение цифровых ресурсов в обучении математике; использование активно-деятельностных технологий на уроках и во внеурочное время и др. Последние два года тьюторы и учителя математики МС отдают предпочтение именно очным встречам и мероприятиям, позволяющим непосредственно общаться, устанавливать перспективные профессиональные контакты, связи.

С целью поддержки взаимодействия участников МС функционирует сайт https://clck.ru/3CrTGd, на котором размещаются методические разработки учителей-тьюторов, прошедшие профессиональную экспертизу, а также анонсы, актуальная новостная информация. В настоящее время на сайте структурирован открытый банк методических материалов, подготовленных участниками МС (раздел «Методические материалы, полезные ссылки»: https://clck.ru/3ATzQJ).

Деятельность МС за период её существования

позволила выявить ценности педагогического сообщества: личностные, профессиональные, коммуникационные.

Личностные – это уверенность, жажда познания, удовольствие от новых задач и общения, становление адекватной профессиональной самооценки, стремление к профессиональному саморазвитию и др.

Профессиональные – методическая поддержка, развитие предметных и методических компетенций; повышение уровня профессионального мастерства; возможность получить качественную квалифицированную помощь по любому вопросу; знакомство с методическими наработками учителей других школ и использование их в своей работе; возможность презентации собственных педагогических разработок и опыта и т.д.

Коммуникационные – возможность работать в команде; развитие коммуникативных навыков в профессиональном общении, способность принять точку зрения другого, отличную от своей; умение вести дискуссию; умение правильно задать вопрос и др.

Ежегодные индивидуальные опросы учителей-участников МС позволили установить, что работа в проекте способствует их профессиональному росту, существенно расширяет их педагогический опыт, стимулирует на познание нового, помогает активизировать инновационную деятельность не только школьных педагогических сообществ, но и районных, а также муниципальных.

Не лишним будет перечислить достижения тьюторов МС за 2023, 2024 гг.:

– четыре учителя математики по итогам федерального конкурса стали лучшими учителями России (Маколкина Т.В., Фефелова О.Ю., Баянкина Л.А.,

Борисова Н.Г.),

- двум учителям математики присвоена квалификация «педагог-методист» (Даниленко Е.Н., Баянкина Л.А.),
- один учитель математики перешел в статус регионального методиста (Полякова Е.О.), проектирующего при поддержке профильной кафедры АИРО индивидуальные образовательные маршруты для учителей математики Алтайского края;
- 12,6% состава предметной комиссии составляют тьюторы Мобильной сети учителей математики.

В данном методическом издании представлены лучшие образовательные практики учителей-тьюторов по разным направлениям образовательной деятельности, затрагивая как содержательно-методический её аспект, так и технологический.

# РАЗДЕЛ 1. Методика обучения избранным вопросам учебного курса «Алгебра», «Алгебра и начала анализа»

## Тема «Проценты» в школьном курсе математики

*Чухловина Маргарита Ивановна*
*учитель математики и информатики*
*МКОУ «Сосновская СОШ»*
*с. Сосновка Заринского района*
*rita_zarinsk@bk.ru*

Тема «Проценты» проходит красной нитью через весь курс школьной математики. Чтобы не «выветрились» знания по данной теме, необходимо постоянно возвращаться, решая задачи на повторение.

Вводить понятие «процент» можно тогда и только тогда, когда учащиеся хорошо научились находить дробь от числа и число по его дроби, а также умеют применять свойство пропорции. Многие задачи легко решаются с помощью пропорции.

Ученикам трудно запомнить правила, которые формулируются в учебнике. Приведём примеры таких алгоритмов [3].

**Нахождение процентов от числа**

1. Заменить проценты десятичной дробью.
2. Умножить это число на полученную десятичную дробь.

Найдите 2% от 600

2% = 0,02

600 · 0,02 = 12

**Нахождение числа по процентам**

1. Заменить проценты десятичной дробью.

2. Разделить число на полученную десятичную дробь.

3% числа равны 18. Найдите это число.

3% = 0,03

18 : 0,03 = 600

Многие школьники не понимают смысла выполняемых действий, не понимают, когда делить, а когда нужно умножать. С пропорцией легче прийти к нужному пониманию.

**Нахождение процентов от числа с помощью пропорции**

600 – 100%

$x$ – 2%

$$\frac{600}{x} = \frac{100}{2}$$

$100 \cdot x = 600 \cdot 2$ (не умножаем, т.к. потом сократим дробь)

$x = 6 \cdot 2$

$x = 12$

**Нахождение числа по процентам с помощью пропорции**

18 – 3%

$x$ – 100%

$$\frac{18}{x} = \frac{3}{100}$$

$3 \cdot x = 18 \cdot 100$ (не умножаем, т.к. потом сократим дробь)

$x = \frac{18 \cdot 100}{3} = 6 \cdot 100 = 600$

При изучении темы «Десятичные дроби» учащиеся должны освоить тот факт, что среди десятичных дробей часто на практике используется дробь 0,01, которая называется *процентом* и обозначается 1% [4].

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = 1\%$$

Сразу выявляются связи между всеми видами дробей и процентами:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%; \qquad \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%.$$

Учащимся предлагаются различные типы заданий на отработку данных умений.

1. Заполните таблицу.

| Дробь | $\frac{1}{4}$ | | | | | $\frac{1}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Десятичная дробь | | 0,6 | | 0,07 | | |
| Проценты | | | 50% | | 2% | |

2. Запишите десятичную дробь в процентах:

а) 0,63 = _____; б) 0,17 = _____; в) 0,345 = _____; г) 2,15 = _____ .

3. Запишите в виде десятичной дроби: а) 7% ; б) 13%; в) 110%; г) 1,02%.

4. На пастбище было 100 животных: 39 телят, 52 овцы, а остальные козы. Сколько процентов от общего количества животных составляют овцы, телята и козы?

5. Смешали 4 кг сушёных яблок и 6 кг сушёных груш. Сколько процентов полученной смеси составляют яблоки?

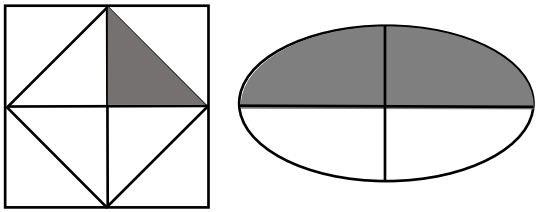
Геометрическая интерпретация играет большую роль. Выполняется много заданий, в которых ученики чертят, закрашивают, вырезают части геометрических фигур.

Примеры таких заданий приведены ниже.

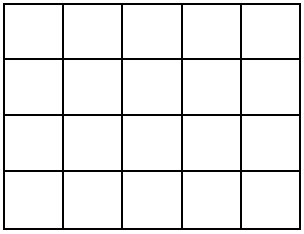
1. Начертите отрезок $KP$, равный 10 см. Начертите отрезок $CD$, длина которого составляет:

а) 50% длины $KP$; б) 10% длины $KP$; в) 65% длины $KP$; г) 110% длины $KP$.

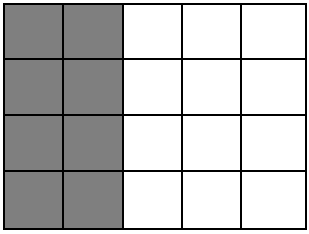
2. Запишите, какая часть фигуры закрашена? Выразите в процентах.



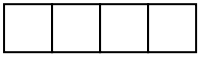
3. Заштрихуйте несколько квадратов так, чтобы площадь заштрихованной части составила 20% площади прямоугольника.



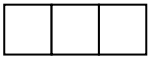
4. Сколько процентов площади прямоугольника составляет закрашенная часть?

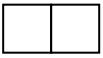
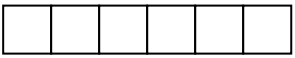


5. Дан прямоугольник [4]:

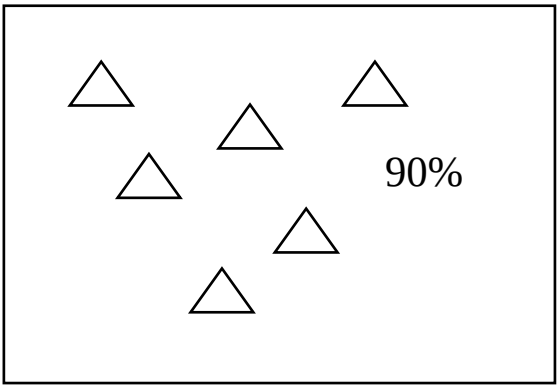


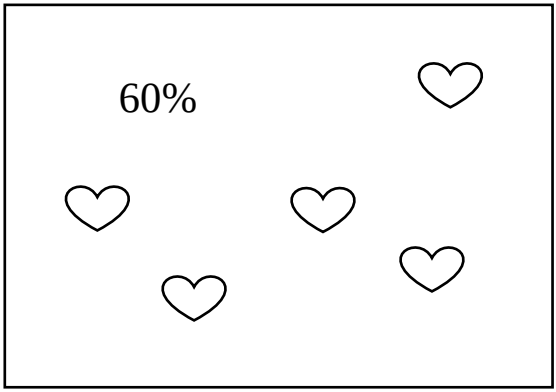
Если его площадь принять за 100%, то площади других прямоугольников будут составлять:

а)  ___%; б)  ___%;

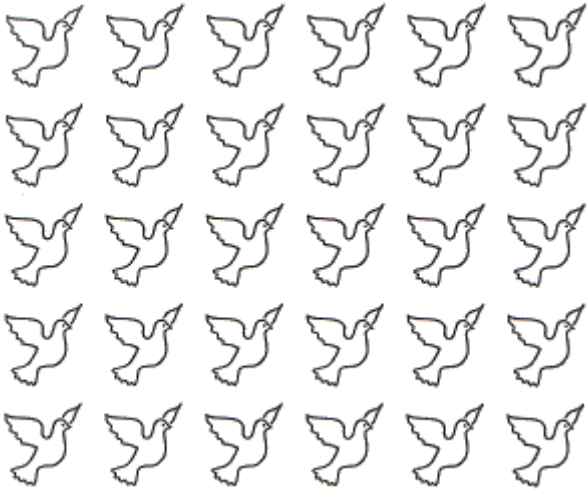
в)  ___%; г)  ___%.

6. Дополните рисунок так, чтобы получилось 120% фигур:

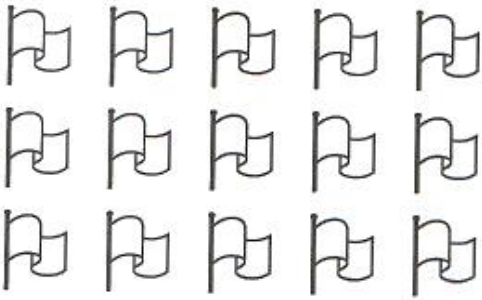


7. Закрасьте 10% птичек.

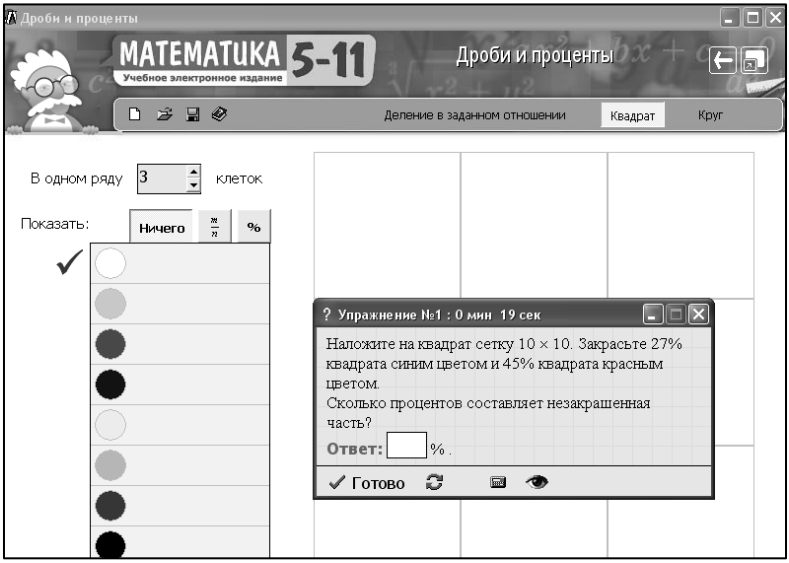


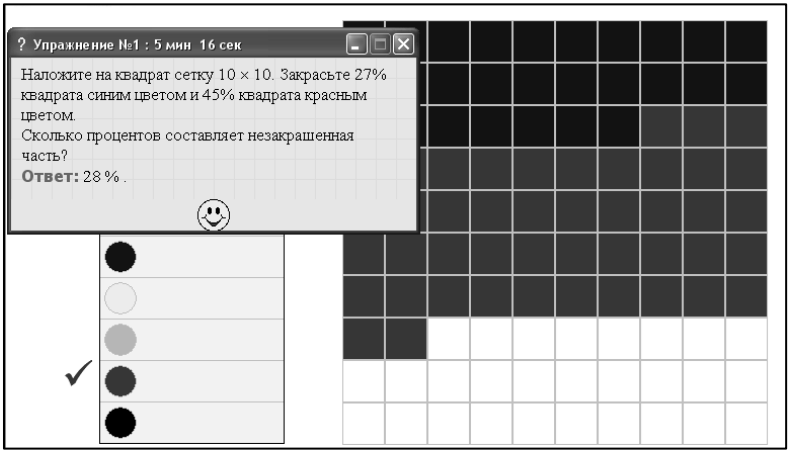
8. Закрасьте 60% флажков.



Работа на компьютере с программой «Дрофа-Дос для НФПК. Учебное электронное издание Математика 5-11» делает изучаемый материал более наглядным. Ученик сразу видит результат своей работы.

1. Наложите на квадрат сетку 10×10. Закрасьте 27% квадрата синим цветом и 45% квадрата красным цветом. Сколько процентов составляет незакрашенная часть?

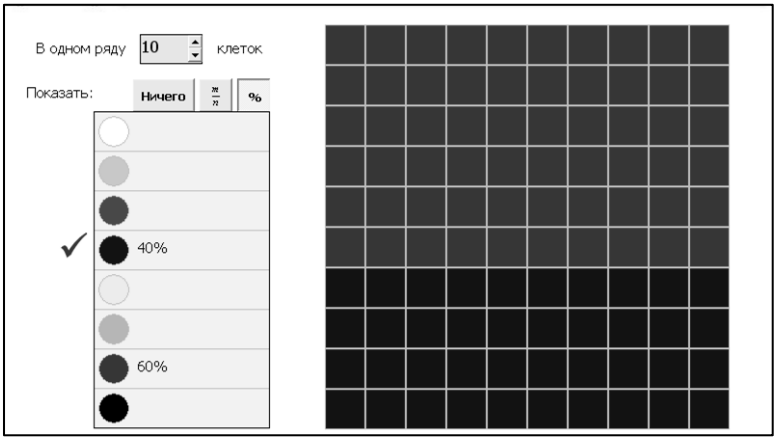


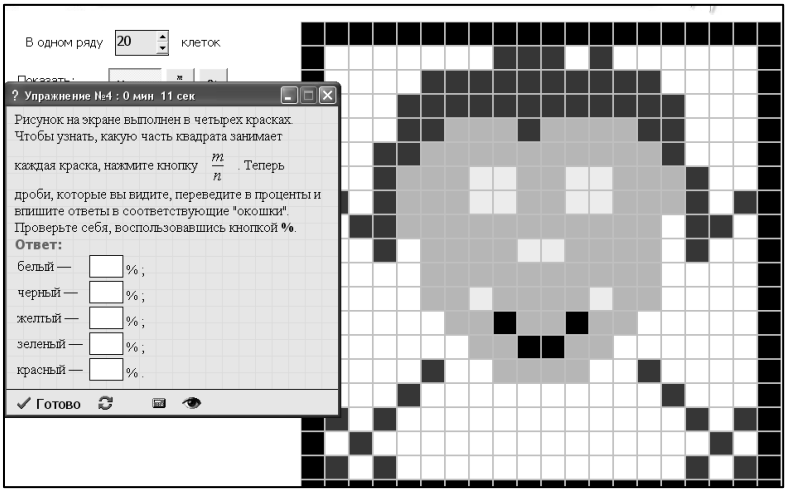

Работа с заданием в программе позволяет ученикам проявлять самостоятельность, контролировать собственную учебную деятельность. Накладывая сетку, учащиеся повторяют тему «Площадь квадрата».

2. Раскрасьте квадрат в два цвета (красный и синий) так, чтобы красного цвета было на 20% больше, чем синего.

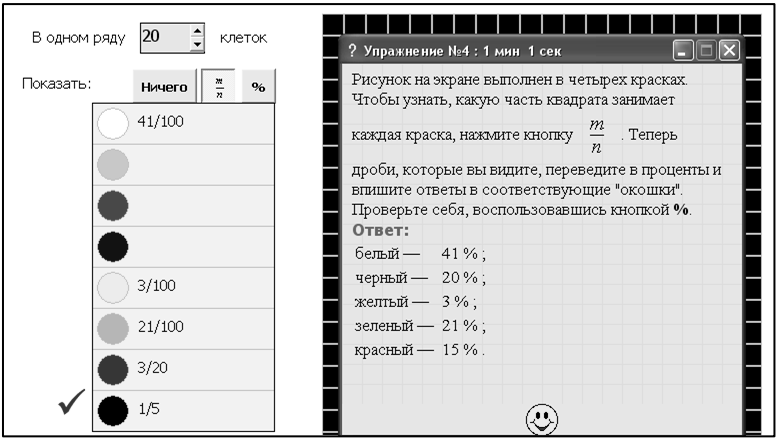
Проверьте себя с помощью кнопки «%».



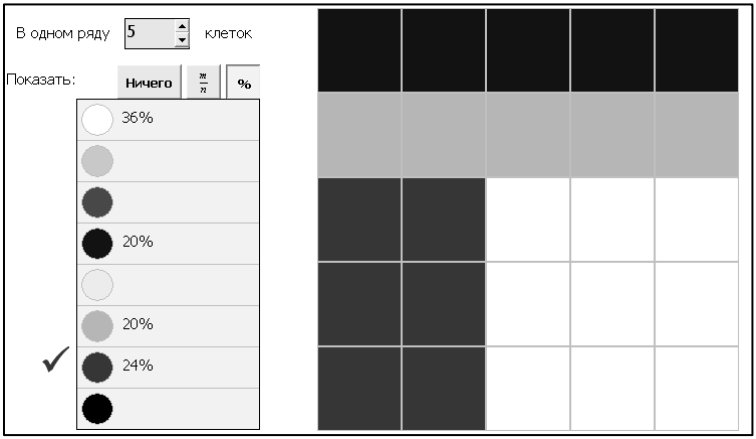

3. Рисунок на экране выполнен в четырёх цветах. Чтобы узнать, какую часть квадрата занимает каждый цвет нажмите кнопку «$\frac{m}{n}$». Теперь дроби, которые вы видите, переведите в проценты и впишите ответы в соответствующие «окошки». Проверьте себя, воспользовавшись кнопкой «%».



Обращаем внимание на то, что в одном ряду 20 клеток. Целесообразнее учащимся самим посчитать закрашенные квадраты, выразить в обыкновенных дробях, а затем в процентах, после чего выполнить самопроверку.




4. Наложите на квадрат сетку 5×5. Закрасьте 20% квадрата, затем другим цветом – 25% оставшейся части, а третьим цветом – 40% нового остатка. Сколько процентов квадрата составляет его незакрашенная часть? Ответьте на этот вопрос, не используя кнопку «%». Теперь нажмите кнопку «%». Не все числа, появившиеся на экране, совпадают с числами, которые даны в условии задачи. Объясните, почему так получилось.




Разбираемся: 25% остатка это 20% всего квадрата, 40% нового остатка это 24% всего квадрата.

Поняв, что значит процент от остатка, учащиеся хорошо решают задачи такого типа.

5. В коробке были карандаши. Сначала из коробки взяли 50% карандашей, а затем 40% остатка. После этого в коробке осталось 3 карадаша. Сколько карандашей было в коробке первоначально?

3 карандаша – 60% остатка

$x$ карандашей – 100% остатка

$$\frac{3}{x} = \frac{60}{100}$$

$$60 \cdot x = 300$$

$x = 5$ – остаток.

$$\frac{5}{x} = \frac{50}{100}$$

5 карандашей – 50%

$x$ карандашей – 100%

$$50 \cdot x = 500$$

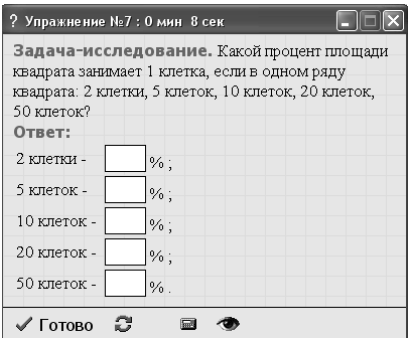
$$x = 10.$$

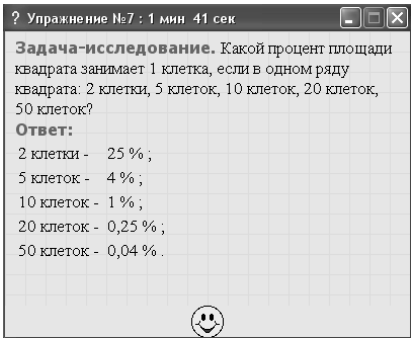
Ответ: первоначально было 10 карандашей.

Интерактивные формы работы в данном приложении

позволяют осуществлять дифференцированный подход в обучении математике. Каждый ученик идёт по своей образовательной траектории. Более мотивированные к учению дети приступают к решению задач исследовательского характера. Приведем примеры.

1. Задача-исследование. Какой процент площади квадрата занимает 1 клетка, если в одном ряду квадрата: 2 клетки, 5 клеток, 10 клеток, 20 клеток, 50 клеток?



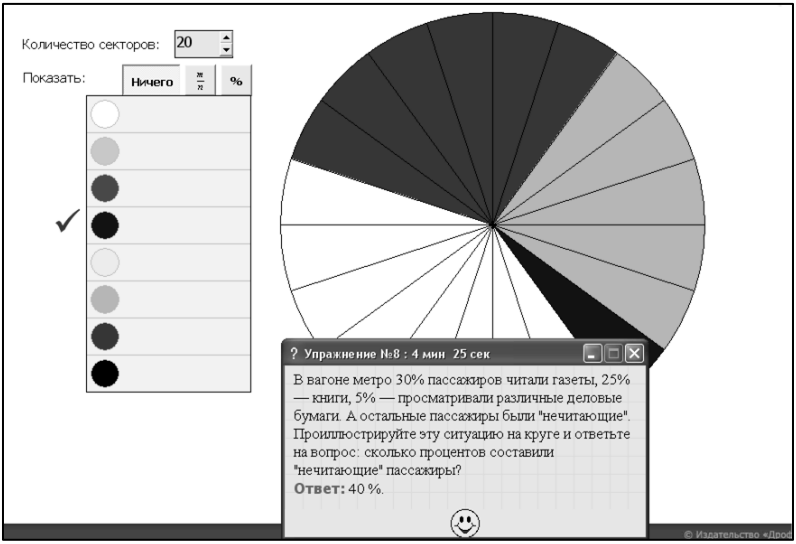

2. Задача-исследование. Подберите такую квадратную сетку, чтобы одна её клетка составляла 4%.

3. Задача-исследование. Можно ли подобрать такую квадратную сетку, чтобы одна её клетка составила 10%? 1%?

4. В вагоне метро 30% пассажиров читали газеты, 25% – книги, 5% просматривали различные деловые бумаги. А остальные пассажиры были «нечитающие». Проиллюстрируйте эту ситуацию на круге и ответьте на вопрос: сколько процентов составили «нечитающие» пассажиры?

*Примечание к задаче 4.* Количество секторов учащиеся выбирают сами. При количестве секторов 100, секторы становятся очень мелкими и возникает проблема с закрашиванием. Учащиеся пытаются найти выход из создавшегося положения. Таким образом, учащиеся смогут выйти сразу на несколько предметных умений: умение

сокращать дроби, умение приводить дроби к общему знаменателю.




Учеба в школе для учеников должна быть направлена на понимание процессов в окружающем мире и выявление существующих связей. Поэтому важно, чтобы учитель, готовясь к занятию, подбирал задачи, которые вызовут или поддержат интерес у учащихся. Среди таких заданий особое место занимают межпредметные. Ниже приведены некоторые примеры.

*Связь с учебным предметом «История».*

1. В Московском Кремле находятся царь-пушка и царь-колокол, отлитые русскими мастерами. Масса колокола 200 т, а масса пушки составляет 20% массы колокола. Какова масса царь-пушки?

Сразу на карточке с этой задачей дается информация из энциклопедии Кирилла и Мефодия:

«Царь-колокол», памятник литейного искусства

XVIII в., установлен в Московском Кремле; масса свыше 200 т (высота с ушками 6,14 м, диаметр 6,6 м); отлит в 1733-1735 гг. русскими мастерами И.Ф. Маториным и М.И. Маториным. Во время пожара 1737 г. от «Царь-колокола» отвалился кусок в 11,5 т.

«Царь-пушка», артиллерийское орудие (мортира), отлитое в 1586 г. русским мастером А. Чоховым. Масса ствола 40 т, длина 5,34 м, калибр 890 мм. Предназначалась для обороны Кремля (но из неё никогда не стреляли). Памятник литейного искусства XVI в. Установлена в Московском Кремле.

*Связь с учебным предметом «География».*

Планета Земля состоит из железа (37%), кислорода (29%), кремния (15%), магния (7%), остальные элементы составляют 12%. По этим данным постройте круговую диаграмму.

*Связь с учебным предметом «Биология».*

В организме человека вода составляет 63%, белки – 19%, жиры – 14%, углеводы и зола – 4%. По этим данным постройте круговую диаграмму.

Описанный в статье подход к изучению темы «Проценты», построенный на продвижении от простого к сложному, позволит учащимся с пониманием осваивать этот учебный материал.

*Литература*

1. CD-ROM Практикум. Математика 5-11. Учебное электронное издание. – ООО «Дрофа», ООО «ДОС», 2004.
2. Материалы газеты «Первое сентября. Математика».
3. Попова Л.П. Поурочные разработки по математике. 5 класс: пособие для учителя. – 10-е изд. – М. : ВАКО, 2023. –

448 с. – С. 364. – С. 367.
4. Стромова З.С., Пожарская О.В. Математика. 5 класс: Поурочные планы по учебнику Н.Я. Виленкина и др. – Волгоград: Учитель, 2005. – 152 с. – С. 100-101. – С.105.

## Решение экономических задач при помощи таблиц

*Борисова Наталья Геннадьевна*
*учитель математики*
*МБОУ «Первомайская СОШ»*
*с. Черемное Павловского района*
*bonata711@rambler.ru*

*«Что значит владение математикой?*
*Это значит умение решать задачи,*
*причем не только стандартные,*
*но и требующие известной независимости мышления,*
*здравого смысла, оригинальности, изобретательности»*
*Д. Пойа*

Актуальность обеспечения высокого уровня экономической и финансовой грамотности населения в условиях современной экономической ситуации в России, вызванной политическими, социальными, технологическими, правовыми и международными факторами, подчеркивает необходимость способности граждан находить эффективные способы решения экономических проблем и осуществлять хозяйственную деятельность. Важное значение для подготовки экономически грамотного населения придается школьному

образованию, поскольку современная общественная среда не обеспечивает детям и подросткам практической подготовки к решению экономических задач в повседневной жизни.

В качестве частного случая решения выше указанных задач можно выделить включение в структуру единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике (профильный уровень) практико-ориентированной задачи с экономическим содержанием. Данная задача в структуре контрольно-измерительных материалов (КИМ) экзамена предлагается участникам экзамена во второй части (задания с развернутым ответом), в 2024 году имеет порядковый номер задания 16 и обладает повышенным уровнем сложности. Предполагаемое время решения указанной задачи участниками экзамена составляет 25-30 минут. В спецификации КИМ ЕГЭ 2024 года и кодификаторе элементов содержания КИМ по математике можно увидеть, что задача направлена на проверку умения использовать приобретенные математические знания в практической деятельности и повседневной жизни [1, 2]. У обучающихся при этом проверяется умение выполнять действия с целыми и рациональными числами, с дробями, со степенями с натуральным показателем, знаний и умений обращаться с процентами, в том числе и сложными «банковскими» процентами [1].

В то же время, как показывает анализ результатов ЕГЭ по математике профильного уровня, у выпускников школ отмечаются проблемы при решении экономических задач:

1. Наличие в таких задачах большого количества терминов, неизвестных учащимся.
2. Старшеклассники плохо ориентируются в материале, изученном в 5–9 классах и необходимом для решения

подобных задач (темы: «Проценты», «Арифметическая, геометрическая прогрессии» вызывают затруднения).

3. Предлагаемые для решения задачи имеют громоздкие вычисления.

Решение задачи с экономическим содержанием, как и любой текстовой задачи, происходит по следующей схеме:

1) Условие задачи необходимо «перевести» на математический язык и составить математическую модель.
2) Решить математическую модель, используя соответствующие алгоритмы.
3) Объяснить полученный для математической модели результат в терминах первоначальной задачи.

В данной статье предлагается рассмотреть один из подходов к решению экономических задач – решение при помощи таблиц. Такая запись решения может показаться громоздкой, но позволяет получить своеобразную схему условия задачи, по которой нетрудно получить математическую модель и решить её.

Для упрощения записей и вычислений при решении экономических задач целесообразно переходить от «языка процентов» к десятичным дробям. Например, «увеличение величины на 12%» равносильно её умножению на число 1,12 (т.к. 100% + 12% = 112% = 1,12); «уменьшение величины на 25%» равносильно её умножению на число 0,75 (т.к. 100% – 25% = 75% = 0,75).

Большинство задач следует сначала решать «в общем виде», вводя обозначения:

$S$ – сумма вклада или кредита;

$x$ – ежемесячный вклад или ежемесячная выплата;

$n$ – срок кредита (количество месяцев или лет);

$r\%$ – процентная ставка;

$b = 1 + 0{,}01r$ – коэффициент для вычисления процентных начислений.

Числовые данные подставлять только по окончании всех преобразований.

При составлении таблицы сначала заполняется столбец «Долг после выплаты», затем «накручивается» процент – заполняется столбец «Долг с %». Столбец «Выплата» – это разность между данными второго и четвёртого столбцов.

Все задачи, решения которых приведены ниже, взяты с сайта «Решу ЕГЭ» из открытых вариантов реального ЕГЭ-2023 по математике профильного уровня.

**Задачи**

1. **(№639677)**

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 104 800 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Решение.**

$S$ – сумма кредита в р.;

$r$ = 25% – процентная ставка;

$x$ – размер выплаты в р.;

Введём коэффициент $b$ = 1,25.

| Год | Долг с %, р. | Выплата, р. | Долг после выплаты, р. |
|---|---|---|---|
| 2020 | | | $S$ |
| 2021 | $Sb$ | $x$ | $Sb - x$ |
| 2022 | $(Sb - x)b$ | $x$ | $(Sb - x)b - x$ |
| 2023 | $((Sb - x)b - x)b$ | $x$ | $((Sb - x)b - x)b - x = 0$ |

Общая сумма выплат равна:

$3x = S + 104\,800,$

$S = 3x - 104\,800.$

$\big((Sb - x)b - x\big)b - x = 0$

$Sb^3 - b^2x - bx - x = 0$

$(3x - 104\,800)b^3 - b^2x - bx - x = 0$

$3xb^3 - 104\,800b^3 - b^2x - bx - x = 0$

Выразим $x$: $x = \frac{104800 \cdot b^3}{3b^3 - b^2 - b - 1}$.

Т.к. $b = 1{,}25 = \frac{5}{4}$, то $x = \frac{\frac{104800 \cdot 125}{64}}{\frac{375}{64} - \frac{25}{16} - \frac{5}{4} - 1} = \frac{104800 \cdot 125 \cdot 64}{64 \cdot 131} =$

$= 800 \cdot 125 = 100\,000$ (р.) – размер ежегодной выплаты.

Общая сумма выплат равна: $3x = 100000 \cdot 3 = 300000$ (р.).

**Ответ:** 300 000 р.

2. **(№640522)**

15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 2 млн рублей. Условия его возврата следующие:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ – целое число;
– платёж должен вноситься один раз в месяц, со 2-го по 14-е число каждого месяца;

– 15-го числа каждого месяца размер долга должен соответствовать долгу, указанному в таблице:

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн. р.) | 2 | 1,6 | 1,3 | 1 | 0,7 | 0,3 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма платежей больше 3 млн рублей.

**Решение.**

$S$ = 2 млн. рублей – сумма кредита;

$n$ = 6 – количество месяцев;

$r$ – целое число, процентная ставка;

Введём коэффициент $b$ = 1 + 0,01$r$.

Общая сумма выплат больше 3 млн. рублей.

| Дата | Долг с % | Выплата | Долг после выплаты |
|---|---|---|---|
| 15.01 | | | 2 |
| 15.02 | $2b$ | $2b$ – 1,6 | 1,6 |
| 15.03 | 1,6$b$ | 1,6$b$ –1,3 | 1,3 |
| 15.04 | 1,3$b$ | 1,3$b$ – 1 | 1 |
| 15.05 | 1$b$ | 1$b$ – 0,7 | 0,7 |
| 15.06 | 0,7$b$ | 0,7$b$ – 0,3 | 0,3 |
| 15.07 | 0,3$b$ | 0,3$b$ | 0 |

Найдём общую сумму выплат:

$$(2b - 1{,}6) + (1{,}6b - 1{,}3) + (1{,}3b - 1) + (1b - 0{,}7) + \\ + (0{,}7b - 0{,}3) + 0{,}3b = b(2 + 1{,}6 + 1{,}3 + 1 + 0{,}7 + 0{,}3) - \\ -(1{,}6 + 1{,}3 + 1 + 0{,}7 + 0{,}3) = 6{,}9b - 4{,}9 > 3;$$

$6{,}9b > 7{,}9;$

$b > \frac{79}{69}.$

Т.к. $b = 1 + 0{,}01r$ , то $1 + 0{,}01r > \frac{79}{69}$;

$$r > \frac{1000}{69};$$

$r = 15$, т.к. $r$ – целое число.

15% – наименьший процент, при котором общая сумма платежей больше 3 млн рублей.

**Ответ:** 15%.

3. **(№642955)**

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. р. на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r$% по сравнению с концом предыдущего года ($r$ – целое число);
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- в июле 2030 года долг должен составлять 600 тыс. р.;
- в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 2 230 тыс. р. Найдите, сколько рублей составит платёж в 2035 году.

**Решение.**

$S$ = 700 тыс. р. – сумма кредита;

$r$ – процентная ставка;

Введём коэффициент $b = 1 + 0{,}01r$.

Т.к. в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029,

2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года, то долг ежегодно уменьшался на (700 – 600) : 5 = 20.

Т.к. в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года, то долг ежегодно уменьшался на 600 : 5 = 120.

| Год | Долг с %, тыс. р. | Выплата, тыс. р. | Долг после выплаты, тыс. р. |
|---|---|---|---|
| 2025 | | | 700 |
| 2026 | $700b$ | $700b$ – 680 | 680 |
| 2027 | $680b$ | $680b$ – 660 | 660 |
| 2028 | $660b$ | $660b$ – 640 | 640 |
| 2029 | $640b$ | $640b$ – 620 | 620 |
| 2030 | $620b$ | $620b$ – 600 | 600 |
| 2031 | $600b$ | $600b$ – 480 | 480 |
| 2032 | $480b$ | $480b$ – 360 | 360 |
| 2033 | $360b$ | $360b$ – 240 | 240 |
| 2034 | $240b$ | $240b$ – 120 | 120 |
| 2035 | $120b$ | $120b$ | 0 |

Найдём общую сумму выплат:

$$(700b - 680) + (680b - 660) + (660b - 640) +$$
$$+(640b - 620) + (620b - 600) + (600b - 480) +$$
$$+(480 - 360) + (360b - 240) + (240b - 120) + 120b =$$
$$= 2230;$$
$$b(700 + 680 + 660 + 640 + 620 + 600 + 480 + 360 +$$
$$+240 + 120) - (680 + 660 + 640 + 620 + 600 + 480 +$$
$$+360 + 240 + 120 = 5100b - 4400 = 2230;$$
$$b = \frac{6630}{5100} = 1{,}3.$$

В 2035 году платёж составит $120 \cdot 1{,}3 = 156$ тыс. р.

**Ответ:** 156 000 р.

4. **(№642411)**

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1 125 тысяч рублей?

**Решение.**

$S$ – сумма кредита в тыс. р.

Процентная ставка в 2026-2029 гг. – 20%; в 2030-2033 гг. – 18%.

Введём коэффициенты: $b = 1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$;

$$k = 1{,}18 = \frac{118}{100} = \frac{59}{50}.$$

| Год | Долг с %, тыс. р. | Выплата, тыс. р. | Долг после выплаты, тыс. р. |
|---|---|---|---|
| 2025 | | | $S$ |
| 2026 | $Sb$ | $Sb-\frac{7S}{8}$ | $\frac{7S}{8}$ |
| 2027 | $\frac{7Sb}{8}$ | $\frac{7Sb}{8}-\frac{6S}{8}$ | $\frac{6S}{8}$ |
| 2028 | $\frac{6Sb}{8}$ | $\frac{6Sb}{8}-\frac{5S}{8}$ | $\frac{5S}{8}$ |
| 2029 | $\frac{5Sb}{8}$ | $\frac{5Sb}{8}-\frac{4S}{8}$ | $\frac{4S}{8}$ |
| 2030 | $\frac{4b}{8}$ | $\frac{4Sk}{8}-\frac{3S}{8}$ | $\frac{3S}{8}$ |
| 2031 | $\frac{3Sk}{8}$ | $\frac{3Sk}{8}-\frac{2S}{8}$ | $\frac{2S}{8}$ |
| 2032 | $\frac{2Sk}{8}$ | $\frac{2Sk}{8}-\frac{1S}{8}$ | $\frac{1S}{8}$ |
| 2033 | $\frac{1Sk}{8}$ | $\frac{1Sk}{8}$ | 0 |

Найдём общую сумму выплат:

$$Sb(1+\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8})+Sk(\frac{4}{8}+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8})-S(\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{8}+$$
$$+\frac{2}{8}+\frac{1}{8})=\frac{12}{10}\cdot\frac{13}{4}\cdot S+\frac{10}{8}\cdot\frac{59}{50}\cdot S-\frac{7}{2}\cdot S=1{,}875S.$$

По условию задачи $1{,}875S$ должно быть равно 1125.

Составим уравнение: $1{,}875S=1125$, откуда $S=\frac{1125}{1{,}875}=600$ тыс. р.

**Ответ:** 600 000 р.

5. **(№642376)**

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2030 года долг должен составлять 800 тыс. р.;
– в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

**Решение.**

$S$ – сумма кредита в тыс. р.;

$r$ = 10% – процентная ставка;

Введём коэффициент $b$ = 1,1.

| Год | Долг с %, тыс. р. | Выплата, тыс. р. | Долг после выплаты, тыс. р. |
|---|---|---|---|
| 2025 | | | $S$ |
| 2026 | $Sb$ | $Sb$ – (160 + 0,8$S$) | $800 + \frac{4}{5}(S - 800) =$ $=160 + 0{,}8S$ |
| 2027 | (160 + 0,8$S$)$b$ | (160 + 0,8$S$)b – – (320 + 0,8$S$) | $800 + \frac{3}{5}(S - 800) =$ $= 320 + 0{,}8S$ |
| 2028 | (320 + 0,8$S$)$b$ | (320 + 0,8$S$)$b$ – – (480 + 0,8$S$) | $800 + \frac{2}{5}(S - 800) =$ $= 480 + 0{,}8S$ |
| 2029 | (480 + 0,8$S$)$b$ | (480 + 0,8$S$)$b$ – – (640 + 0,8$S$) | $800 + \frac{1}{5}(S - 800) =$ $= 640 + 0{,}8S$ |
| 2030 | (640 + 0,8$S$)$b$ | (640 + 0,8S)b – – 800 | **800** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2031 | 800 ·1,1 = 880 | 880 – 640 = 240 | 640 |
| 2032 | 640 ·1,1 = 704 | 704 – 480 = 224 | 480 |
| 2033 | 480 ·1,1 = 528 | 528 – 320 = 208 | 320 |
| 2034 | 320 · 1,1 =352 | 352 – 160 = 192 | 160 |
| 2035 | 160 ·1,1 = 176 | 176 | 0 |

Найдём общую сумму выплат:

$$b(160 + 320 + 480 + 640) + Sb(0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}2 + \\ +1) + (240 + 224 + 208 + 192 + 176) - (160 + 320 + \\ +480 + 640 + 800) - S(0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}2) = \\ = 1600b + 1040 - 2400 + 3{,}3S - 2S = 1{,}3S.$$

По условию задачи: $1{,}3S = 1\,690$,

$$S = \frac{1690}{1{,}3} = 1\,300.$$

1 300 тыс. р – начальная сумма кредита.

**Ответ**: 1 300 тыс. р.

Обучение решению задач с экономическим содержанием важно не только для успешной сдачи экзаменов, но и для формирования практически полезных навыков. При использовании прикладных задач в учебном процессе можно также помочь учащимся понять экономические термины и концепции. В современном мире, где требуются конкурентоспособные личности, финансовая грамотность становится все более важной. Использование задач с экономическим содержанием поможет выпускникам лучше понять практическое применение математики и подготовить их к финансовым вызовам, которые предстоит встретить в жизни.

В Концепции программы повышения уровня финансовой грамотности населения РФ это понятие трактуют как способность граждан [3]:

– эффективно управлять личными финансами;
– осуществлять учёт расходов и доходов домохозяйства и осуществлять краткосрочное и долгосрочное финансовое планирование;
– оптимизировать соотношение между сбережениями и потреблением;
– разбираться в особенностях различных финансовых продуктов и услуг (в том числе инструментов рынка ценных бумаг и коллективных инвестиций), иметь актуальную информацию о ситуации на финансовых рынках;
– принимать обоснованные решения в отношении финансовых продуктов и услуг и осознано нести ответственность за такие решения;
– компетентно планировать и осуществлять пенсионные накопления.

Изложенные обстоятельства определяют актуальность вопросов, связанных с повышением экономической грамотности школьников, и делают проблему усиления прикладной направленности математики одним из важнейших направлений развития школьного математического образования.

*Литература*

1. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике. – URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения 15.05.2024).
2. Спецификация контрольных измерительных материалов

для проведения в 2024 году Единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень). – URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения 15.05.2024).
3. Стратегия повышения финансовой грамотности в Российской Федерации на 2017-2023 гг. утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 25 сентября 2017 г. № 2039-р.
4. Чумаченко В.В., Горяев А.П. Основы финансовой грамотности: учебное пособие для общеобразовательных организаций. – М. : Просвещение, 2019.

## Квадратный трехчлен. Коэффициенты и графики

*Деменёва Алёна Васильевна*
*учитель математики*
*МБОУ «Первомайская СОШ»*
*Бийского района*
*Demeneva_alena@mail.ru*

Одним из самых интересных разделов математики можно считать раздел «Функции и их графики». Этот раздел изучается на протяжении всего школьного курса алгебры. Умение читать и строить графики функций значительно расширяет спектр приемов решения различных задач и очень часто позволяет найти решения к задачам, когда арсенал алгебраических методов бессилен. Графики незаменимы при решении уравнений, неравенств, систем уравнений и

неравенств, а их огромная роль в решении задач с параметрами ни у кого не вызывает сомнения.

На сегодняшней день существует огромное количество электронных инструментов, позволяющих строить графики функций любой сложности, но чтобы использовать их для решения практических задач, человек должен знать основы работы с функциями и графиками и уметь использовать основные приёмы: умение определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций; определять точки пересечения графиков; анализировать поведение графика функции при наличии изменяющегося параметра. Все перечисленные навыки содержатся в требованиях к освоению предметного содержания учебного предмета «Математика» и являются основой для разработки экзаменационных материалов.

Предлагаем рассмотреть традиционные и нетрадиционные подходы к решению задач, в которых используется квадратичная функция. Квадратичная функция широко используется в экзаменационных материалах ОГЭ и ЕГЭ: построение графика функции; определение наибольшего или наименьшего значений функции; определение знаков коэффициентов и коэффициентов функции; определение точек пересечения графиков функций; определение площади криволинейной трапеции и др. (ОГЭ – задания №№11, 22; ЕГЭ профиль – задания №№7, 11, 12, 18).

В статье используются задания Банка ФИПИ по математике и их аналоги, опубликованные на сайте https://sdamgia.ru/.

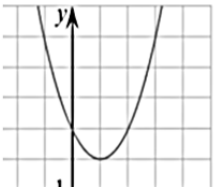
Большая часть представленных методов базируется на свойствах коэффициентов квадратичной функции. В отличии от традиционных методов решения эти методы позволяют развивать наблюдательность и своеобразную математическую интуицию, расширяют общие представления о графических методах решения алгебраических задач, развивают творческие способности детей и, в конечном итоге, формируют понимание причинно-следственных связей в научной картине мира.

*Зависимость расположения графика квадратного трехчлена от его коэффициентов*

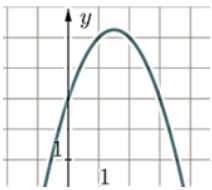
На первых уроках знакомства с квадратичной функцией и ее графиком достаточно легко показать зависимость формы графика и его расположение от коэффициентов квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

- Коэффициент ***a*** определяет направление ветвей и их крутизну.

Направление ветвей

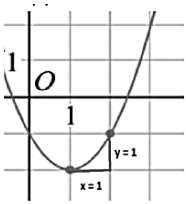



$a > 0$




$a < 0$

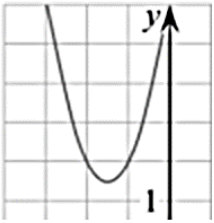
Крутизна ветвей



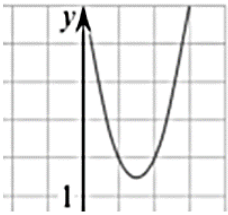

$a = \frac{y}{x^2}$

- Коэффициенты ***a*** и ***b*** совместно определяют координату вершины параболы $x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a}$, $y_{\text{вершины}} = y(x_{\text{вершины}})$ и её расположение

относительно оси Оу.

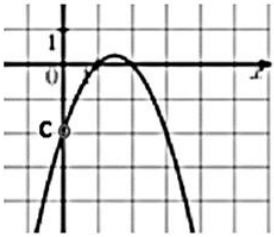



$a \cdot b > 0$

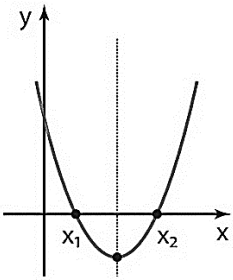



$a \cdot b < 0$

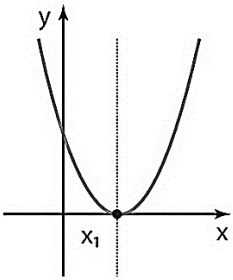
- Коэффициент ***c*** определяет точку пересечения с осью О*y*.



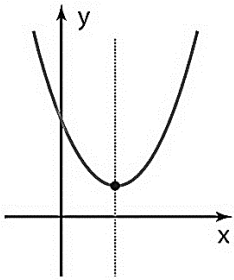

*Точки пересечения с осью Ох*




$D > 0$




$D = 0$

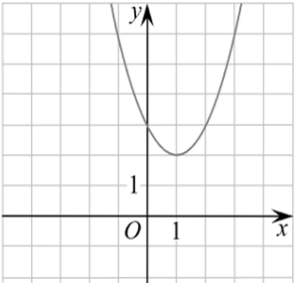



$D < 0$

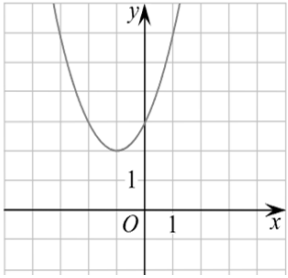
Рассмотрим решение заданий ОГЭ (задание №11) с использованием представленной выше схемы.

**Задание 1.** На одном из рисунков изображен график функции $y = x^2 - 2x + 3$. Определите этот рисунок:

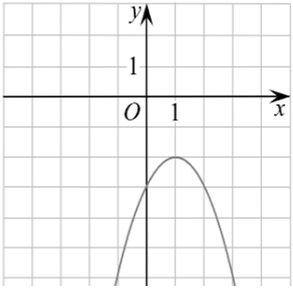
1)



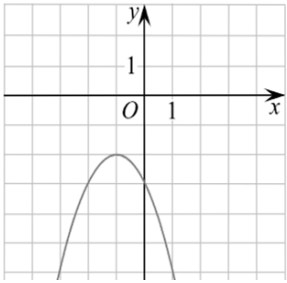

2)




3)




4)




$a = 1$, следовательно, ветви параболы направлены вверх.

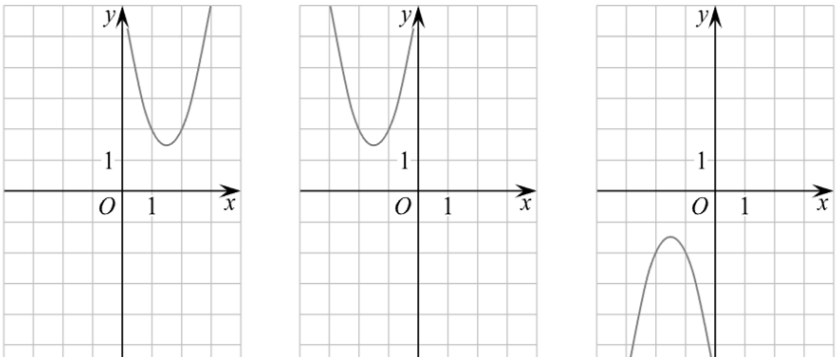
$a \cdot b = -2 < 0$, следовательно, вершина расположена справа от оси О*x*.

Указанным условиям соответствует рисунок под цифрой 1.

**Ответ:** 1.

**Задание 2.** Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают:

А) Б) В)




1) $y = -2x^2 + 6x - 6$
2) $y = -2x^2 - 6x - 6$
3) $y = 2x^2 + 6x + 6$
4) $y = 2x^2 - 6x + 6$

Рисунку А) соответствует формула с условиями $a > 0$ и $a \cdot b < 0$. Из предложенных формул вариант 4) $y = 2x^2 - 6x + 6$ удовлетворяет данным условиям.

Рисунку Б) соответствует формула с условиями $a > 0$ и $a \cdot b > 0$. Из предложенных формул вариант 3) $y = 2x^2 + 6x + 6$ удовлетворяет данным условиям.

Рисунку В) соответствует формула с условиями $a < 0$ и $a \cdot b > 0$. Из предложенных формул вариант 2) $y = -2x^2 - 6x + 6$ удовлетворяет данным условиям.

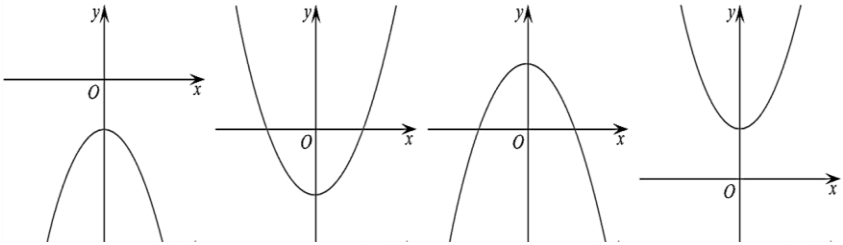
**Ответ:** 432.

**Задание 3.** На рисунке изображены графики функций

вида $y = ax^2 + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов *a* и *c*.

*Графики*

А) Б) В) Г)




*Знаки коэффициентов*

1) $a > 0$, $c < 0$ 2) $a < 0$, $c > 0$ 3) $a > 0$, $c > 0$ 4) $a < 0$, $c < 0$

Рисунок А) ветви вниз, а потому $a < 0$, точка пересечения с осью О$y$ – $c < 0$.

Рисунок Б) ветви вверх, а потому $a > 0$, точка пересечения с осью О$y$ – $c < 0$.

Рисунок В) ветви вниз, а потому $a < 0$, точка пересечения с осью О$y$ – $c > 0$.

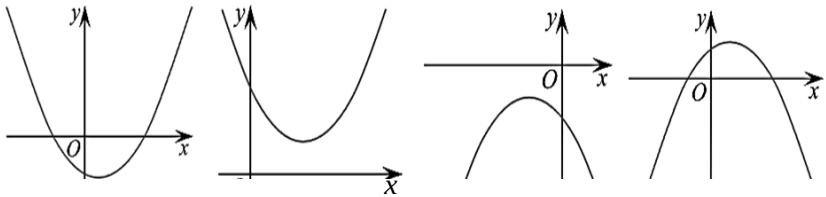
Рисунок Г) ветви вверх, а потому $a > 0$, точка пересечения с осью О$y$ – $c > 0$.

**Ответ:** 4123.

**Задание 4.** На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствие ему значения коэффициента *a* и дискриминанта *D*.

*Графики*

А) Б) В) Г)




*Знаки чисел*

1) $a > 0$, $D > 0$; 2) $a > 0$, $D < 0$; 3) $a < 0$, $D > 0$; 4) $a < 0$, $D < 0$

Рисунок А) ветви вверх, а потому $a > 0$, две точки пересечения с осью О$x$, следовательно, $D > 0$.

Рисунок Б) ветви вверх, а потому $a > 0$, нет точек пересечения с осью О$x$ – $D < 0$.

Рисунок В) ветви вниз – $a < 0$, нет точек пересечения с осью О$x$ – $D < 0$.

Рисунок Г) ветви вниз – $a < 0$, две точки пересечения с осью О$x$ – $D > 0$.

**Ответ:** 1243.

*Построение графика квадратичной функции*

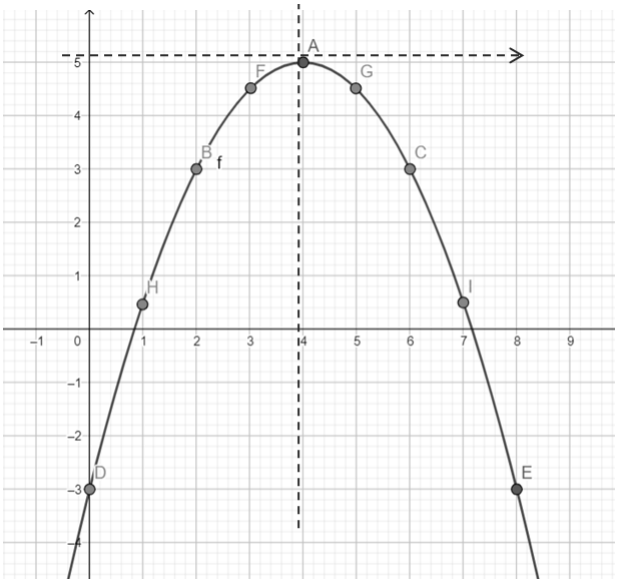
Построение графика квадратичной функции традиционным методом в пункте «Дополнительные точки» для многих обучающихся становится непосильной задачей из-за вычислений. В предложенном методе «дополнительные точки» определяются для упрощенной функции (без второго и третьего слагаемых), что существенно сокращает вычисления и уменьшает время.

**Задание 5**. Построить график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$.

- Определим вершину (4; 5).
- Сместим начало координат в отмеченную вершину.
- Определим крутизну и направление ветвей. По формуле $y = -\frac{1}{2}x^2$ найдём точки графика:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | –0,5 | –2 | –4,5 | –8 |

Нанесем точки в новой системе координат и соединим их линией (рис.):




Рассмотрим задание на построение графика (ОГЭ, задание №22)

**Задание 6**. Постройте график функции $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$ и определите, при каких значениях $m$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**Решение.**

- Упростим заданную функцию с учетом области определения: $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1} = x^2 + 6x + 8, x \neq -1$.
- Построим график функции: на рис. 1 парабола без точки (–1, 3).
- Проведём прямые $y = m$ (прямые параллельные оси O$x$).
- Из проведённых прямых выберем прямые, имеющие с графиком одну общую точку: $y = 3$ и $y = -1$.

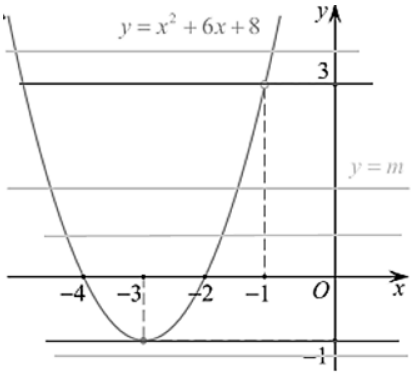


Рис. 1

**Ответ:** 3; –1.

*Три способа задания квадратичной функции по ее графику*

Способ задания функции – формулой $y = ax^2 + bx + c$ (1).

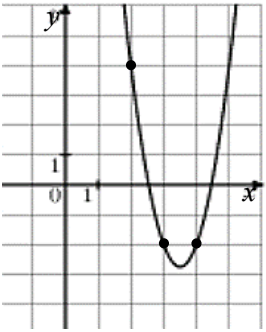


Рис. 2

Универсальный метод определения коэффициентов: *выбираем три точки графика – составляем системы из трех уравнений – определяем коэффициенты.*

Выбираем точки, принадлежащие графику функции на рис. 2, и составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -2, \ \textit{точка}\ (3; -2) \\ 16a + 4b + c = -2, \ \textit{точка}\ (4; -2) \\ 4a + 2b + c = 4, \ \textit{точка}\ (2;\ 4) \end{cases}$$

**Ответ:** $y = 3x^2 - 21x + 34$.

Способ задания функции – формулой $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ (2)

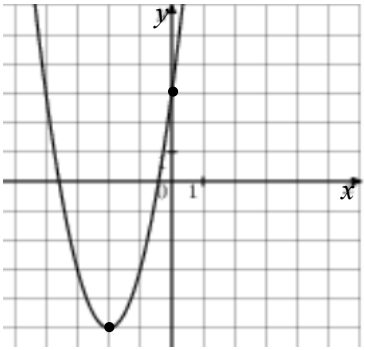



Рис. 3

Метод определения коэффициентов: *берём координаты вершины и одну точку графика – составляем уравнение – определяем а – приводим полученное уравнение к стандартному виду.*

Выбираем точки, принадлежащие графику функции на рис. 3: **вершина** (–2, –5), **точка графика** (0; 3) и составляем уравнение:

$$3 = a(0 + 2)^2 - 5$$

$$a = 2$$

$$y = 2(x + 2)^2 - 5 = 2x^2 + 8x + 3$$

**Ответ**: $y = 2x^2 + 8x + 3$.

Способ задания функции – формулой

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1, x_2$ – корни трёхчлена (3).

Метод определения коэффициентов: *берем абсциссы точек пересечения с Ох и одну точку графика – составляем уравнение – определяем а – приводим полученное выражение к стандартному виду.*

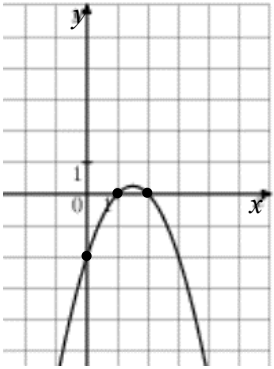



Рис. 4

Выбираем точки принадлежащие графику функции на рис. 4: точка (0; –2), абсциссы точек пересечения графика с О*x*: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Составим уравнение:

$$-2 = a(0-1)(0-2),$$
$$a = -1$$
$$y = -1(x-1)(x-2) = -x^2 + 3x - 2$$

**Ответ**: $y = -x^2 + 3x - 2$.

Рассмотрим решение заданий ЕГЭ (Задание №11), используя указанные выше методы.

**Задание 7.** На рисунке 5 изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$ которые пересекаются в точках *A* и *B*. Найдите абсциссу точки *B*.

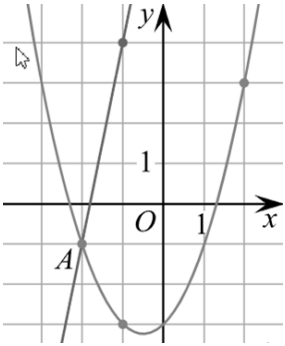



Рис. 5

**Решение.**

Определим формулу, задающую параболу, используя три точки графика по формуле 1:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -1, \ \textit{точка}\ (-2, -1) \\ a - b + c = -3, \ \textit{точка}\ (-1, -3) \\ c = -3, \ \textit{точка}\ (0, -3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = -3. \end{cases}$$

Получим уравнение параболы $y = x^2 + x - 3$.

Находим точки пересечения параболы и прямой:

$$x^2 + x - 3 = 5x + 9$$
$$x_1 = -2, x_2 = 6$$

$x = -2$ абсцисса точки *A*, поэтому $x = 6$ является искомой абсциссой точки *B*.

**Ответ:** 6.

**Задание 8.** На рисунке 6 изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа $a$, $b$ и $c$ – целые. Найдите значение $f(6{,}5)$.

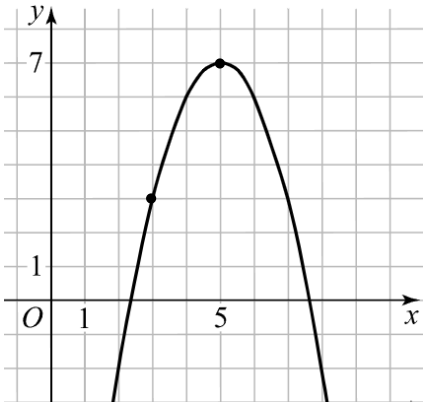



Рис. 6

**Решение.**
Определим формулу, задающую параболу, используя формулу 2. Координаты вершины (5, 7), точка графика (3, 3), тогда:

$3 = a(3-5)^2 + 7$

$a = -1$

$y = -(x-5)^2 + 7 = -x^2 + 10x - 18.$

Используя полученную формулу, найдем $f(6{,}5) = 4{,}75$.

**Ответ:** 4,75.

*Задача о криволинейной трапеции*

При рассмотрении задачи о криволинейной трапеции, ограниченной частью параболы и осью О$x$ нам важна лишь форма параболы, а не ее местоположение, поэтому используя смещение системы координат можно расположить трапецию в более «выгодном для расчетов месте».

Рассмотрим решение заданий ЕГЭ (Задание 8) на определение площади криволинейной трапеции, используя перенос графика в начало координат.

**Задание 9.** На рисунке 7 изображён график некоторой функции $f(x)$. Функция $F(x) = 2x^3 + 60x^2 + 602x - \frac{5}{4}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

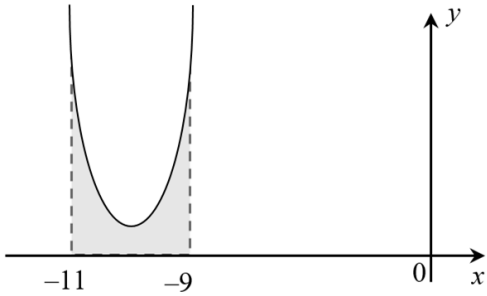



Рис. 7

**Решение.**

Трапеция ограничена параболой, осью О$x$ и двумя вертикальными прямыми, имеет симметричную форму. Идеальный вариант для расчетов, если ось О$y$ будет проходить через вершину параболы. Запишем формулу данной параболы:

$$f(x) = F'(x) = 6x^2 + 120x + 602 = 6(x + 10)^2 + 2.$$

Запишем уравнение параболы той же крутизны, но с абсциссой вершины равной нулю: $f(x) = 6x^2 + 2$.

Определим площадь трапеции, поменяв пределы интегрирования:

$$S = \int_{-1}^{1} (6x^2 + 2)\, dx = 2\int_{0}^{1} (6x^2 + 2)\, dx = 8$$

**Ответ:** 8.

**Задание 10.** На рисунке 8 изображён график некоторой функции $f(x)$. Функция $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{17}{4}x^2 - 35x - \frac{5}{11}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

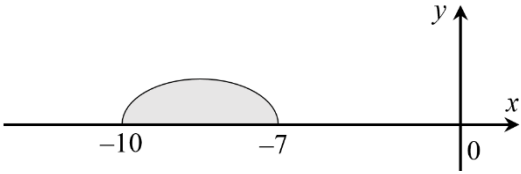



Рис. 8

**Решение.**

Трапеция ограничена параболой и осью О*x*, имеет симметричную форму. Идеальный вариант для расчетов, если ось О*y* будет проходить через вершину параболы. Запишем формулу данной параболы:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{17}{2}x - 35 = -\frac{1}{2}(x + 8{,}5)^2 + \frac{9}{8}.$$

Запишем уравнение параболы той же крутизны, но с абсциссой вершины равной нулю: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{8}$.

Определим площадь трапеции, поменяв пределы интегрирования:

$$S = \int_{-1{,}5}^{1{,}5}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{8}\right)dx = 2\int_{0}^{1{,}5}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{8}\right)dx = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

**Ответ:** 2,25.

*Исследование монотонной функции*
*от квадратного трехчлена*

**Монотонная функция** – функция одной переменной, определённая на некотором подмножестве действительных чисел, которая на своей области определения везде убывает, либо везде возрастает.

Функция называется **возрастающей**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется **убывающей**, если большему

значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Среди элементарных функций выделим три монотонные функции: $y = \sqrt{x}, y = a^x$ и $y = \log_a x$. Если в качестве аргумента перечисленных функций выступает квадратный трехчлен, то определение наибольших и наименьших значений функции, а также точек максимума и минимума можно провести без использования производной, исследуя поведение графика квадратичной функции на наибольшее или наименьшее значение.

Рассмотрим решение заданий ЕГЭ (Задание №12), используя монотонность функции от квадратного трёхчлена.

**Задание 11.** Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{3+2x-x^2}$.

**Решение.**

Функция $y = 5^{f(x)}$ возрастает на множестве действительных чисел. Следовательно, достигает наибольшего значения при наибольшем значении аргумента $f(x) = 3 + 2x - x^2$. Графиком $f(x)$ является парабола с ветвями направленными вниз, что говорит о наличии максимального значения в вершине.

Определим абсциссу вершины параболы $x_0 = 1$. В этой точке $f(x)$ достигает своего максимального значения, следовательно, возрастающая функция $y = 5^{f(x)}$ также достигает своего наибольшего значения именно в этой точке:

$$y_{наибол.} = 5^{3+2\cdot 1-1^2} = 5^4 = 625.$$

**Ответ:** 625.

**Задание 12.** Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-19; -1]$.

**Решение.**

Функция $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ убывает на множестве действительных чисел, следовательно, достигает наибольшего значения при наименьшем значении аргумента $f(x) = x^2 + 6x + 12$. Графиком $f(x)$ является парабола с ветвями направленными вверх, что говорит о наличии минимального значения в вершине.

Определим абсциссу вершины параболы $x_0 = -3$. В этой точке $f(x)$ достигает своего минимального значения и данная точка принадлежит указанному отрезку $[-19; -1]$. Следовательно, убывающая функция $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + +12)$ также достигает своего наибольшего значения именно в этой точке:

$$y_{наибол.} = \log_{\frac{1}{3}}((-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 12) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1.$$

**Ответ:** –1.

# Решение задач с параметрами – от простого к сложному

*Маколкина Татьяна Викторовна*
*учитель математики*
*МБОУ «Гимназия №123»*
*г. Барнаул*
*tan_grom@mail.ru*

Решение задач с параметрами является одним из самых трудных разделов школьной математики и требует большого количества времени на их изучение.

К сожалению, в программах по математике задачам с параметром отводится очень мало места. Между тем, задачи с параметрами можно и нужно использовать уже начиная с линейных и квадратных уравнений и неравенств. Это могут быть задачи на нахождение решений в общем виде, определение корней, удовлетворяющих каким-либо свойствам, исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

При решении заданий с параметром важно понимать разницу между неизвестной и параметром. Корень уравнения – это значение неизвестной, при котором равенство выполняется. Параметр же является коэффициентом уравнения и может определённым образом влиять на числовое значение корня, а также на количество корней.

В формулировке задач с параметром, как правило, просят найти значения параметра, при которых уравнение имеет заданное количество корней – например, один, два или три.

Чаще всего мы имеем дело с уравнениями с параметром, неравенствами с параметром и их системами. Но параметр может встретиться и в формуле, задающей функцию. Например, линейная функция с параметром. Эта формула задаёт семейство прямых на плоскости, которые проходят через определённую точку в системе координат. Параметр при этом определяет угол наклона каждой прямой к оси О$x$ – это угол, который отсчитывается от положительного направления оси к прямой против часовой стрелки.

Задачи с параметром можно решать разными методами. Мы рассмотрим графический метод решения задач с параметрами.

Графический метод решения основан на построении графиков уравнений, неравенств и их систем. Если в уравнении одна неизвестная и один параметр, то можно построить график этого уравнения в системе координат – это будет множество всех точек на плоскости, каждая из которых является решением этого уравнения. Тогда ответить на вопрос, при каких значениях параметра уравнение имеет нужное количество решений, не так сложно. Когда в уравнении две неизвестных, например, да ещё и параметр, то построить графическое решение сложнее. В таком случае графиком может быть не одна линия, а целое семейство похожих линий, движение которых по плоскости зависит от значения параметра.

Приведем некоторые краткие теоретические сведения, которые можно использовать при решении задач с параметрами графическим методом.

**1. Прямая**

$y = kx + m$

***k* – параметр (поворот)**

*Пример:* $y = kx + 3$

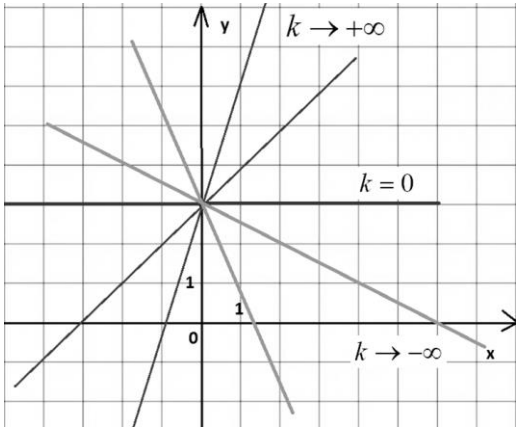



Рис. 1

***m* – параметр (параллельный перенос)**

*Пример:* $y = 3x + m$

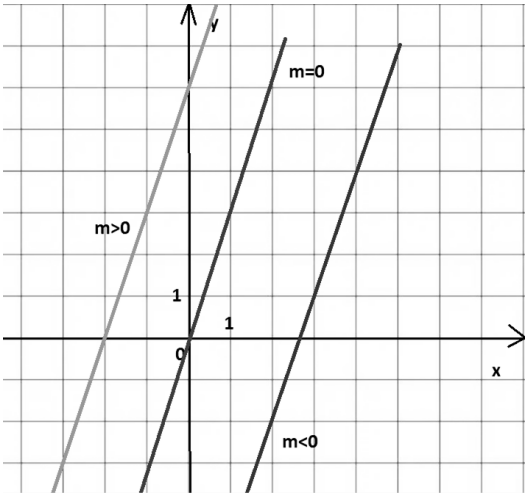



Рис. 2

## 2. Уравнение окружности

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$(x_0;\ y_0)$ – центр окружности

$r$ – радиус окружности

**а) *r* = *a* – параметр**

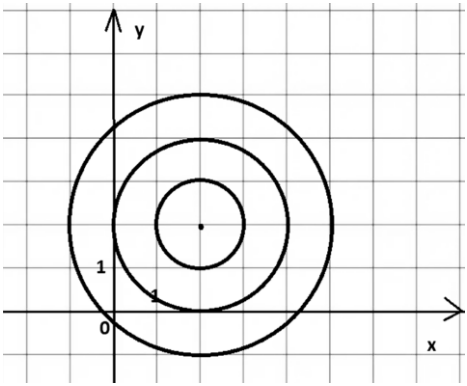



Рис. 3

Для нахождения радиуса возможно использовать формулу расстояния от точки прямой.

Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой $l$: $Ax + By + C = 0$ (рис. 4) равно $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

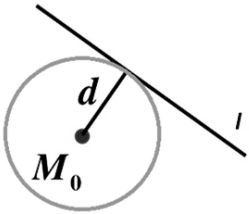



Рис. 4

**б) $(x_0; y_0)$ – центр окружности параметр**

$(x - x_0)^2 + (y - a)^2 = r^2$ – центр $(x_0;\ a)$ лежит на прямой $x = a$.

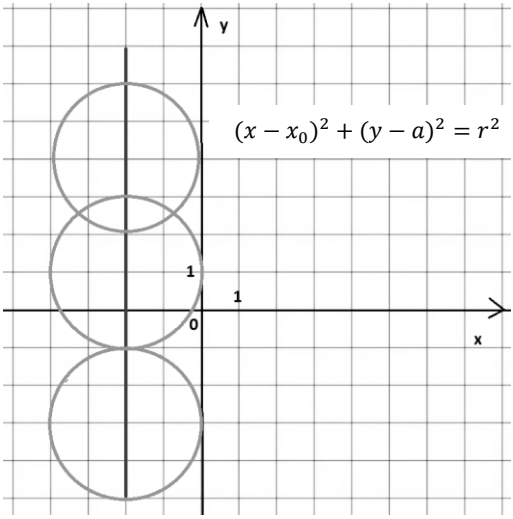



Рис. 5

$(x - a)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ – центр $(a; y_0)$ лежит на прямой $y = a$.

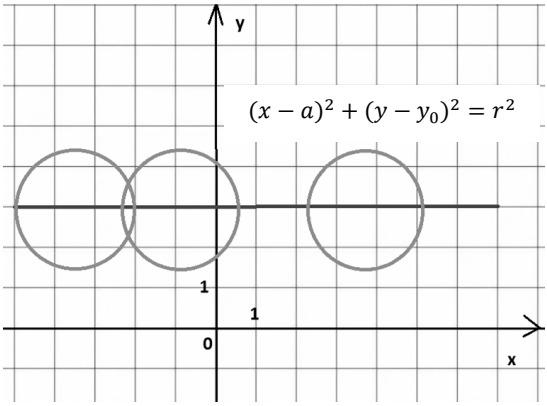



Рис. 6

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$ – центр $(a;a)$ лежит на прямой $y = x$.

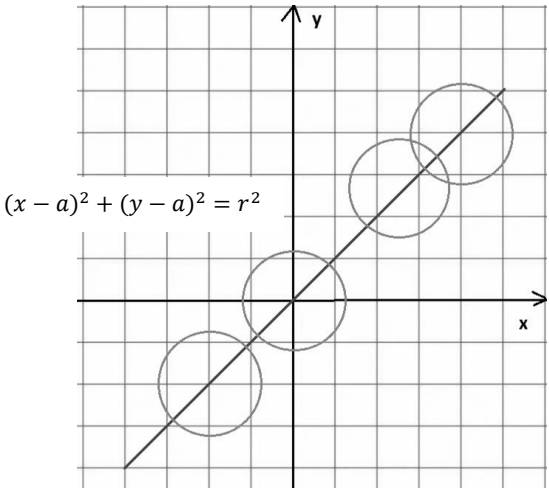



Рис. 7

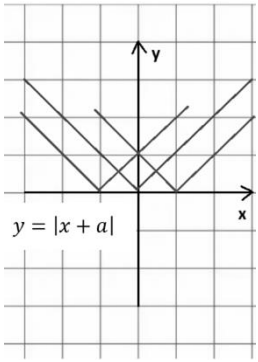
**3. Модуль**

$y=|x+a|$

$y=|x|+a$

$y=\big||x|+a\big|$

$|x-x_0|+|y-y_0|=a$



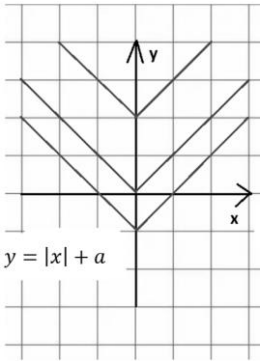
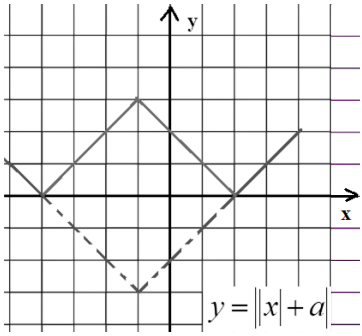




Рис. 8



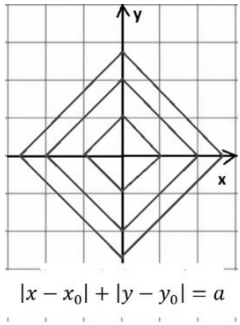




Рис. 9

Рассмотрим серию заданий на решение задач с параметрами графическим методом.

**Задача 1.**

При каких значениях параметра $a$ уравнение $|x-2| - |x+1| = 2 - x + a$ имеет два решения.

**Решение.**

Данную задачу можно переформулировать следующим образом: построить график функции $y = |x-2| - |x+1| - 2 + x$ и найти значение $a$, при которых прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Запишем функцию, опираясь на определение модуля:

$$y = \begin{cases} x - 2 - x - 1 + x - 2, x \geq 2, \\ 2 - x - x - 1 + x - 2, -1 \leq x < 2, \\ 2 - x + x + 1 + x - 2, x < -1. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x - 5, x \geq 2, \\ -x - 1, -1 \leq x < 2, \\ x + 1, x < -1. \end{cases}$$

Изобразим график функции:

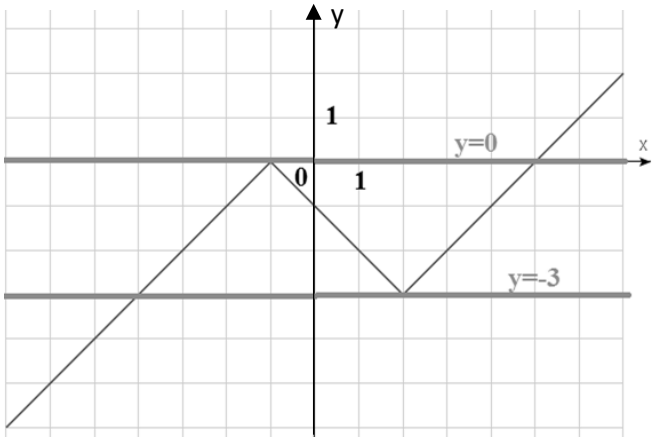


Рис. 10

Прямая $y = a$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $a = -3$ или $a = 0$.

**Ответ**: $\{-3;\ 0\}$.

**Задача 2.**

Сколько решений в зависимости от параметра $a$ имеет уравнение $\left|\frac{1-2x}{x+1}\right| = a$**.**

**Решение.**

Построим график функции $y = \left|\frac{1-2x}{x+1}\right|$ и найдём количество точек пересечения с прямой $y = a$.

Преобразуем $y = \frac{1-2x}{x+1}$:

$y = \frac{-2(x+1)+2+1}{x+1}$,

$y = \frac{3}{x+1} - 2$.

График функции $y = \frac{3}{x+1} - 2$ – это гипербола со смещением на 2 единицы вниз и на 1 влево. Для построения искомого графика функции (рис. 10) применим

преобразование: $y = f(x) \to y = |f(x)|$.

Прямая $y = a$ имеет с графиком функции:

– одну общую точку при $a = 0, a = 2$.
– две общие точки при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Следовательно, уравнение имеет одно решение при $a \in \{0;\ 2\}$, два решения при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

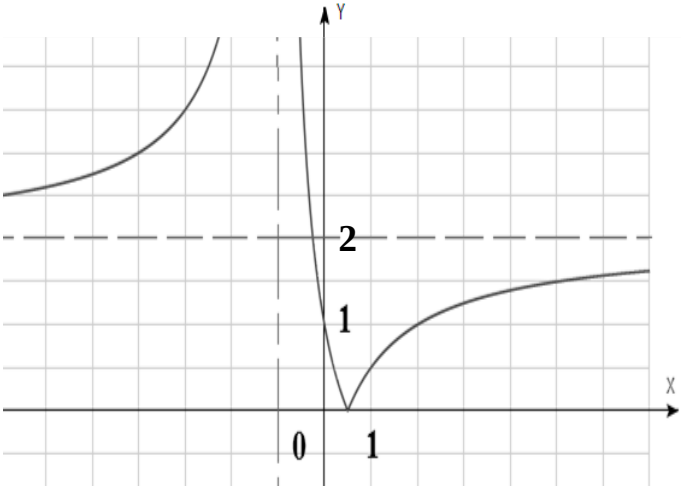



Рис. 11

**Ответ**: одно решение при $a \in \{0;\ 2\}$; два решения при $a \in (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

**Задача 3.** При каких значениях параметра $k$ уравнение не имеет решение $\frac{|x|-4}{x^2-4|x|} = kx$.

**Решение.**

Построим график функции $y = \frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и найдём значение параметра $k$, при котором график функции не имеет общих точек с прямой $y = kx$.

Найдем область определения: $x^2 - 4|x| \neq 0$.

Т.к. $x^2 = |x|^2$, то $|x|(|x| - 4) \neq 0$;

$$\begin{cases} |x| \neq 0, \\ |x| \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm 4. \end{cases}$$

Преобразуем функцию:

$$y = \frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)},$$

$$y = \frac{1}{|x|}, \; y = \left|\frac{1}{x}\right|.$$

Для построения графика функции $y = \left|\frac{1}{x}\right|$ применим преобразование: $y = f(x) \to y = |f(x)|$.

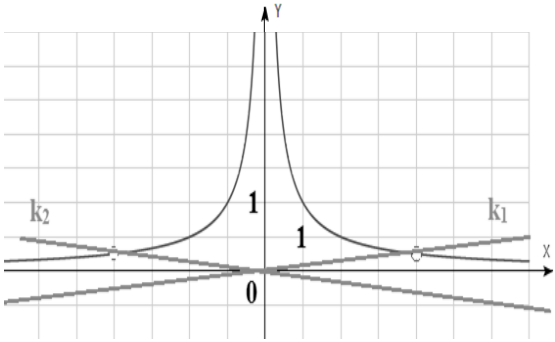



Рис. 12

Прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она горизонтальна, т.е. $k = 0$, либо проходит через одну из выколотых точек $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ или $\left(-4; \frac{1}{4}\right)$.

Найдём значение параметра $k$, подставляя координаты выколотых точек в уравнение прямой:

$$\left(4;\ \frac{1}{4}\right) \qquad\qquad \left(-4;\ \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4} = k \cdot 4 \qquad\qquad \frac{1}{4} = k \cdot (-4)$$

$$k = \frac{1}{16} \qquad\qquad k = -\frac{1}{16}$$

Таким образом, уравнение не имеет решения при $k \in \left\{-\frac{1}{16}; 0; \frac{1}{16}\right\}$.

**Ответ**: $\left\{-\frac{1}{16}; 0; \frac{1}{16}\right\}$.

**Задача 4.** При каких значениях параметра $a$ система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x^2 + y^2 = a, \end{cases}$ имеет 4 решения? 8 решений? Не имеет решений?

**Решение.**

1) $|x| + |y| = 3$. Графиком уравнения является квадрат с центром в точке (0; 0).

2) $x^2 + y^2 = a$. Графиком уравнения является семейство окружностей с центром (0; 0) и радиусом $r = \sqrt{a}$.

Построим графики этих уравнений в одной системе координат (рис. 13).

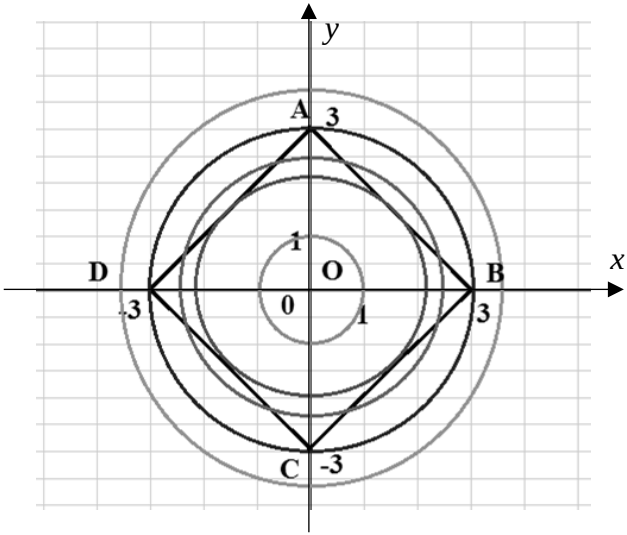


Рис. 13

Найдём, при каких значениях параметра $a$ система уравнений имеет 4 решения:

*1 случай*: окружность вписана в квадрат.

Рассмотрим $\Delta AOB$ – равнобедренный, прямоугольный:

$r = \frac{1}{2}AB$ (Обоснуйте!)

$AB = 3\sqrt{2}$

$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 4{,}5.$

*2 случай*: окружность описана около квадрата. Тогда $r = 3 \Rightarrow \sqrt{a} = 3; a = 9.$

Найдём, при каких значениях параметра $a$ система уравнений имеет 8 решений: $a \in (4{,}5; 9)$.

Найдём, при каких значениях параметра $a$ система уравнений не имеет решений: $a \in [0; 4{,}5) \cup (9; +\infty)$.

**Ответ:** нет решений при $a \in [0; 4{,}5) \cup (9; +\infty)$; 4 решения при $a \in \{4{,}5;\ 9\}$; 8 решений при $a \in (4{,}5; 9)$.

**Задача 5.**

Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

**Решение.**

Преобразуем первое уравнение:

$2x^2 + 2y^2 = 5xy$

$2x^2 + 2y^2 - 4xy - xy = 0$

$2x(x-2y) + y(2y-x) = 0$

$2x(x-2y) - y(x-2y) = 0$

$(x-2y)(2x-y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{2}, \\ y = 2x. \end{array}\right.$

$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4$ – уравнение окружности с центром $(a; a)$, $r = a^2\sqrt{5}$.

Центр окружности лежит на прямой $y = x$.

Построим графики уравнений (рис. 14).

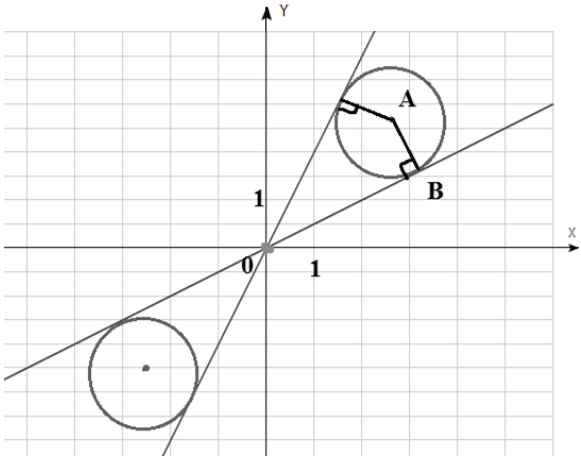



Рис. 14

*1 случай:*

$a = 0$

$x^2 + y^2 = 0$

Графиком уравнения является точка с координатами (0; 0). Графики имеют одну общую точку, значит система имеет 1 решение.

*2 случай:*

$a \neq 0$

Система имеет два решения, когда окружность касается прямых. Т.к. прямые $y = 2x$ и $y = \frac{x}{2}$ симметричны относительно прямой $y = x$, то нам достаточно найти значение параметра *a*, при котором прямая $y = 2x$ или $y = \frac{x}{2}$ имеет с окружностью одну общую точку. Рассмотрим два способа нахождения параметра в данном случае:

*1 способ:*

$$\begin{cases} y = 2x, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4. \end{cases}$$

Система имеет одно решение.

$(x-a)^2 + (2x-a)^2 = 5a^4,$

$x^2 - 2ax + a^2 + 4x^2 - 4ax + a^2 - 5a^4 = 0,$

$5x^2 - 6ax + 2a^2 - 5a^4 = 0.$

Данное уравнение должно иметь один корень, значит $D = 0$.

$D = 36a^2 - 20(2a^2 - 5a^4)$

$36a^2 - 20(2a^2 - 5a^4) = 0$

$36a^2 - 40a^2 + 100a^4 = 0$

$100a^4 - 4a^2 = 0$

$4a^2(25a^2 - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = \pm\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

$a = 0$ – не подходит.

*2 способ:*

Найдем радиус по формуле расстояния от точки $\mathrm{A}(a;\ a)$ до прямой $y = 2x$.

Запишем уравнение прямой в общем виде: $2x - y = 0$.

$r = AB = \frac{|2a-a+0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$;

$\frac{|2a-a+0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = a^2\sqrt{5}$.

Решим уравнение:

$\frac{|a|}{\sqrt{5}} = a^2\sqrt{5}$

$|a| = 5a^2$

$|a| - 5a^2 = 0$

$|a|(1 - 5|a|) = 0$

$\left[\begin{array}{l} |a| = 0, \\ 1 - 5|a| = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = \pm\frac{1}{5}. \end{array}\right.$

$a = 0$ – не подходит.

Таким образом, система уравнений имеет 2 решения при $a = \pm\frac{1}{5}$.

**Ответ**: $\left\{-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right\}$.

Можно сделать *вывод* о том, что графический метод является наиболее наглядным, простым и доступным способом решения задач с параметрами.

*Литература*

1. Азаров, А.И. Математика для старшеклассников: Функциональный и графический методы решения экзаменационных задач / А.И. Азаров, С.А. Барвенов. –

Минск: Аверсэв, 2004.
2. Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике. – URL: https://mathus.ru/me.php (дата обращения: 29.05.2024).
3. Ященко, И.В. ЕГЭ 2024 по математике профильный уровень (профиль) / под ред. И.В. Ященко. – М.: ФИПИ, 2024.

## Методы решения заданий с параметрами

*Кравцова Татьяна Владимировна*
*учитель математики*
*МКОУ Топчихинская средняя общеобразовательная школа №1 имени Героя России Дмитрия Ерофеева*
*с. Топчиха*
*tvk070780@yandex.ru*

Задачи с параметрами являются одними из самых трудных в курсе математики основного и среднего общего образования, так как их решение связано с умением проводить сложные, разветвленные логические построения. В школе первые представления о параметре учащиеся получают при изучении прямой пропорциональности; линейной функции и линейного уравнения; при изучении квадратного уравнения и исследования количества его корней в зависимости от значений параметра.

В школьных учебниках по математике задач с параметрами недостаточно, к тому же, предлагаемые в них примеры слишком просты по сравнению с задачами из ЕГЭ. Поэтому исследование способов решения задач с

параметрами является одним из важных шагов в подготовке к единому государственному экзамену по математике профильного уровня.

Уравнение (система) с параметром – это уравнение (система), в котором некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами (параметрами). Такие уравнения называют еще параметрическими.

Задачи с параметром можно условно разделить на два типа:

1) В условии сказано: решить уравнение (систему) – это значит, для всех значений параметра найти все решения. Если хотя бы один случай остался неисследованным, признать такое решение удовлетворительным нельзя.

2) Требуется указать возможные значения параметра, при которых уравнение (система) обладает определенными свойствами. Например, имеет одно решение, не имеет решений, имеет решения, принадлежащие промежутку и т.д. В таких заданиях необходимо четко указать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Можно выделить два основных метода решения уравнений (систем) с параметром: аналитический и графический.

Аналитический метод – это способ «прямого» решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Аналитический метод решения задач с параметром самый трудный способ, требующий высокой математической грамотности. Прежде, чем приступить к решению задачи с параметрами аналитическим методом, нужно разобраться в ситуации для конкретного числового значения параметра.

Алгоритм решения систем уравнений с параметрами аналитическим способом:

1. Рассмотреть все случаи выражения одной переменной через другую в любом уравнении системы.
2. Подставить выражение в другое уравнение и оценить решение относительно переменной.
3. Часто уравнения сводятся к квадратным уравнениям, поэтому необходимо оценить дискриминант в зависимости от условия, с учётом того, что старший коэффициент не равен нулю.
4. Решить все полученные уравнения относительно выраженных переменных. Рассмотреть ограничения, которые могут появиться при решении.
5. Оценить параметры совпадения решений.
6. Собрать все решения на единую числовую прямую и указать решение по вопросу задачи.

Второй метод – графический. На практике он довольно часто оказывается полезным. При решении задач с параметрами иногда удобно строить графики в плоскости $(a, x)$, где $x$ – независимая переменная, а «$a$» – параметр – зависимая переменная. Графический способ определения числа корней уравнения в зависимости от входящего в него параметра является более удобным, чем аналитический.

Алгоритм решения систем уравнений с параметрами графическим способом:

1. Найти область определения уравнения.
2. Выразить $a$ как функцию от $x$.
3. В системе координат построить график функции $a(x)$ для тех значений $x$, которые входят в область определения данного уравнения.
4. Найти точки пересечения прямой $a = c$, с графиком

функции $a(x)$.

Если прямая $a = c$ пересекает график $a(x)$, то определить абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение $c = a(x)$ относительно $x$.

5. Записать ответ.

При решении уравнений с модулем, содержащих параметр, графическим способом, необходимо построить графики функций и при различных значениях параметра рассмотреть все возможные случаи.

Сочетание аналитического способа решения с графической интерпретацией полученных результатов позволяет сделать процесс решения уравнений с параметрами более осознанным, способствуя при этом формированию элементов исследовательской деятельности.

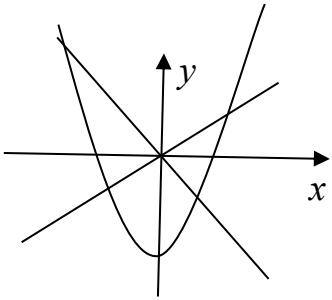
**Пример 1.**

Найдите все значения *a,* при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

**Решение.**

1. Рассмотрим $y^2 = x^2$, $(y - x)(y + x) = 0$, $y = x$ или $y = -x$.

2. Обратим внимание, что графиками функций $y = x, y = -x$ являются прямые, пересекающиеся в точке (0; 0). Подставим каждое значение $y$ в первое уравнение системы:




а) $x = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$,

$(a+2)x^2 + (2a - 1)x + a - 2 = 0$.

При $a+2 \neq 0$, $a \neq -2$ имеет место квадратное уравнение, которое даёт два корня при дискриминанте больше 0:

$$D = (2a-1)^2 - 4(a+2)(a-2) = -4a + 17$$

$$-4a + 17 > 0$$

$a < \frac{17}{4}$ (на данном промежутке система уравнений имеет 2 решения).

б) $-x = (a+2)x^2 + 2ax + a - 2$

$(a+2)x^2 + (2a+1)x + a - 2 = 0$

При $a+2 \neq 0$, $a \neq -2$ имеет место квадратное уравнение, которое дает два корня при дискриминанте больше 0:

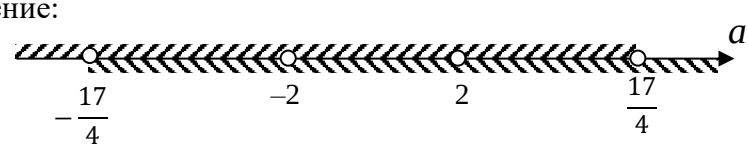
$$D = (2a+1)^2 - 4(a+2)(a-2) = 4a + 17$$

$$4a + 17 > 0$$

$a > -\frac{17}{4}$ (на данном промежутке система уравнений имеет 2 решения).

в) Обратившись к эскизу графиков уравнений системы, замечаем, что, если парабола проходит через точку O(0; 0), то данная система уравнений имеет 3 решения. Поэтому найденное значение параметра $a$ в этом случае надо исключить: $a \neq 2$ (т.к. при $x = 0$ и $y = 0$ $a - 2 = 0$, $a = 2$).

Объединим все решения и исключения в единое решение:




Ответ: $a \in \left(-\frac{17}{4}; -2\right) \cup (-2; 2) \cup \left(2; \frac{17}{4}\right)$.

**Пример 2.**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0\\ xy-1=x-y\end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

**Решение.**

Рассмотрим второе уравнение системы, т.к. оно не имеет параметр. Выразим из этого уравнения $x$ (можно выразить $y$).

$x = -1$ или $y = 1$, т.е. мы должны рассмотреть случаи когда $x = -1$ или $y = 1$.

При $x = -1$

$$(a+1)((-1)^2+y^2) + (a-1)(-1)+(a+1)y+2=0$$

$$(a+1)y^2+(a+1)y+4=0$$

При $a+1 \neq 0$, $a \neq -1$ данное уравнение является квадратным. Квадратное уравнение имеет два решения при положительном дискриминанте:

$$D=(a+1)^2-16(a+1)>0$$

$$a^2-14a-15>0$$

Решая неравенство методом интервалов, получаем $a \in (-\infty; -1) \cup (15; +\infty)$.

При $y = 1$:

$(a+1)(x^2+1^2) + (a-1)x+(a+1)1+2=0$

$(a+1)x^2+(a-1)x+2a+4=0$

При $a+1 \neq 0$, $a \neq -1$ данное уравнение является квадратным. Квадратное уравнение имеет два решения при дискриминанте больше нуля:

$D=(a-1)^2-(4a+4)(2a+4)>0$

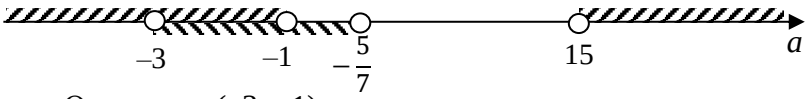
$7a^2+26a+15<0$

Решая неравенство методом интервалов и учитывая, что $a \neq -1$ получаем $a \in (-3; -1) \cup (-1; -\frac{5}{7})$.

Найдём значение параметра $a$, при котором одновременно $x = -1$ и $y = 1$ и с учётом требования задания исключим это значение $a$:

$$2a + 2 - a + 1 + a + 1 + 2 = 0,\ a = -3.$$

На числовой прямой отметим все найденные значения параметра $a$, отвечающие условию задания, и найдём пересечение соответствующих промежутков:




Ответ: $a \in (-3; -1)$.

**Пример 3.**

Найти все значения $a$, при которых система уравнений $\begin{cases}(x - 2a + 2)^2 + (y + a - 2)^2 = a + 2{,}5 \\ x + y = 1 - a\end{cases}$ имеет единственное решение.

**Решение.**

$x + y = 1 - a, \quad y = 1 - a - x$

$(x - 2a + 2)^2 + (1 - a - x + a - 2)^2 = a + 2{,}5$

$2x^2 + 6x - 4ax + 4a^2 - 9a + 2{,}5 = 0$

$2x^2 + x(6 - 4a) + 4a^2 - 9a + 2{,}5 = 0$

Квадратное уравнение имеет ровно один корень, при дискриминанте равном нулю:

$D = (6 - 4a)^2 - 8(4a^2 - 9a + 2{,}5) = 0$

$2a^2 - 3a - 2 = 0$

$D = 25\ \ a_1 = 2,\ \ a_2 = -0{,}5$

**Ответ**: 2; – 0,5.

**Пример 4.**

Найти все такие значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5-7x}\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{5-7x}\ln(3x+a)$ имеет ровно один корень.

**Решение.**

$$\sqrt{5-7x}\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{5-7x}\ln(3x+a)$$

$$\sqrt{5-7x}(\ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a))=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл:

$$\begin{cases} 5-7x=0 \\ 3x+a>0 \\ 9x^2-a^2>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a)=0 \\ 5-7x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ a>-\frac{15}{7} \\ -\frac{15}{7}<a<\frac{15}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2-a^2=3x+a \\ 3x+a>0 \\ 5-7x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ -\frac{15}{7}<a<\frac{15}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} (3x+a)(3x-a-1)=0 \\ a>-3x \\ x\leq\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+a=0 \\ a>-3x \\ x\leq\frac{5}{7} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x-a-1=0 \\ a>-3x \\ x\leq\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{a}{3} \\ a>-3x \\ x\leq\frac{5}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{a+1}{3} \\ a>-3x \\ x\leq\frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{a}{3} \\ a>-3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right) \\ -\frac{a}{3}\leq\frac{5}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{a+1}{3} \\ a>-3\frac{a+1}{3} \\ \frac{a+1}{3}\leq\frac{5}{7} \end{cases}$$

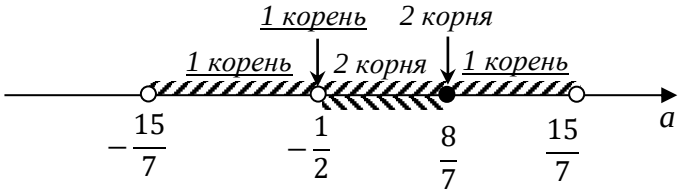
$$\begin{cases} x = -\frac{a}{3} \\ a > a \\ a \geq -\frac{15}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{a+1}{3} \\ a > -a - 1 \\ a \leq \frac{15}{7} - 1 \end{cases}$$

Нет решений $\qquad \begin{cases} x = \frac{a+1}{3} \\ 2a > -1 \\ a \leq \frac{8}{7} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{a+1}{3} \\ a > -\frac{1}{2} \\ a \leq \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a+1}{3} \\ -\frac{1}{2} < a \leq \frac{8}{7} \end{cases}$$

Рассмотрим количество корней исходного уравнения в зависимости от найденных значений параметра:




Проанализировав рисунок, запишем значения параметра, при которых уравнение имеет ровно один корень: $a \in \left(-\frac{15}{7};\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{8}{7}; \frac{15}{7}\right)$.

**Ответ**: $a \in \left(-\frac{15}{7};\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{8}{7}; \frac{15}{7}\right)$.

**Пример 5.**

Найдите значение $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2}\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

1. При $y>|4|$, первое уравнение не имеет смысла, т.к. подкоренное выражение отрицательное число, значит, работаем при ограничениях $-4\le y\le 4$.

2. $16-y^2=16-a^2x^2$,

$y=ax$ или $y=-ax$

Вернёмся к данной системе уравнений:

$\begin{cases}y=ax\\ x^2+a^2x^2=8x+4ax\end{cases}$ $\begin{cases}y=-ax\\ x^2+a^2x^2=8x-4ax\end{cases}$

Решая второе уравнение каждой системы, получим:

$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{8+4a}{1+a^2}\\ y=\frac{8a+4a^2}{1+a^2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ или $\begin{cases}x=\frac{8-4a}{1+a^2}\\ y=\frac{4a^2-8a}{1+a^2}\end{cases}$

Итак, решение исходной системы уравнений – это **три пары чисел**.

Проверим условие $-4\le y\le 4$ для каждой пары чисел.

$y=0$: $-4\le 0\le 4$, удовлетворяет условию.

$y=\frac{8a+4a^2}{1+a^2}$:

$-4\le\frac{4a^2+8a}{1+a^2}\le 4$

$\begin{cases}8a+4a^2\le 4(1+a^2)\\ 8a+4a^2\ge -4(1+a^2)\end{cases}$

$\begin{cases}a\le 0{,}5\\ a-\text{любое число}\end{cases}$

$a\le 0{,}5$

$y=\frac{4a^2-8a}{1+a^2}$:

$-4\le\frac{4a^2-8a}{1+a^2}\le 4$

$\begin{cases}-8a+4a^2\le 4(1+a^2)\\ -8a+4a^2\ge -4(1+a^2)\end{cases}$

$\begin{cases}a\ge -0{,}5\\ a-\text{любое число}\end{cases}$

$a\ge -0{,}5$

Т.к. нужно найти ровно два различных решения, то определим значения параметра, при которых найденные пары совпадают:

а) (0; 0) и $\left(\frac{8+4a}{1+a^2};\ \frac{8a+4a^2}{1+a^2}\right)$

$$\begin{cases}\frac{8+4a}{1+a^2}=0\\ \frac{8a+4a^2}{1+a^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8+4a=0\\ 8a+4a^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ 4a(2+a)=0\end{cases} \Rightarrow a=-2$$

Таким образом, указанные пары совпадают при $a=-2$;

б) (0; 0) и $\left(\frac{8-4a}{1+a^2};\ \frac{4a^2-8a}{1+a^2}\right)$

$$\begin{cases}\frac{8-4a}{1+a^2}=0\\ \frac{4a^2-8a}{1+a^2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8-4a=0\\ 4a^2-8a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ 4a(a-2)=0\end{cases} \Rightarrow a=2$$

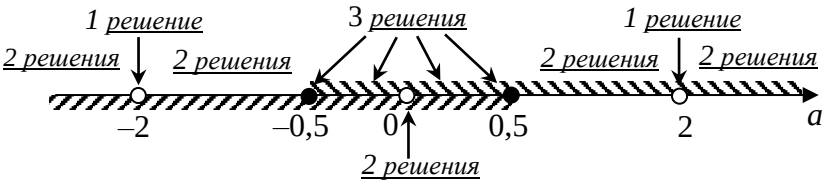
Таким образом, указанные пары совпадают при $a=2$;

в) $\left(\frac{8+4a}{1+a^2};\ \frac{8a+4a^2}{1+a^2}\right)$ и $\left(\frac{8-4a}{1+a^2};\ \frac{4a^2-8a}{1+a^2}\right)$

$$\begin{cases}\frac{8+4a}{1+a^2}=\frac{8-4a}{1+a^2}\\ \frac{8a+4a^2}{1+a^2}=\frac{4a^2-8a}{1+a^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8+4a=8-4a\\ 8a+4a^2=4a^2-8a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8a=0\\ 16a=0\end{cases} \Rightarrow a=0$$

Таким образом, указанные пары совпадают при $a=0$.

Покажем найденные значения $a$ и соответствующее количество решений на числовой прямой:



Значения –0,5 и 0,5 исключаем, т.к. при этих значениях параметра система имеет 3 решения.

Значение 0 включаем, т.к. при $a = 0$ ненулевые решения совпадают, т.е. остается два решения.

Значения –2 и 2 исключаем, т.к. т.к. при этих значениях параметра система имеет совпадающие решения, т.е. нет ровно двух решений. Таким образом, $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -0{,}5) \cup \{0\} \cup (0{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$.

**Ответ**:
$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -0{,}5) \cup \{0\} \cup (0{,}5; 2) \cup (2; +\infty)$.

**Пример 6.**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $10a + \sqrt{-7 + 8x - x^2} = ax + 3$ имеет единственный корень.

**Решение.**

$\sqrt{-7 + 8x - x^2} = ax + 3 - 10a$

Рассмотрим функции $y = ax + 3 - 10a$ и $y = \sqrt{-7 + 8x - x^2}$.

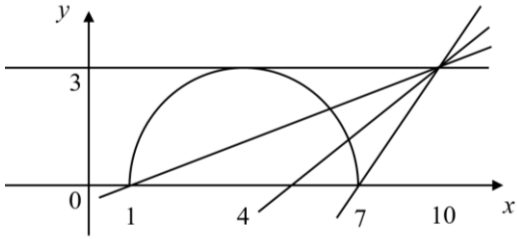
Графиком функции $y = ax + 3 - 10a$ является пучок прямых, проходящих через точку (10; 3).

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{-7 + 8x - x^2}$. Преобразовав уравнение при $y \geq 0$, получим график полуокружности с центром (4; 0) и радиусом 3:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + (x-4)^2 = 9 \end{cases}$$

В системе координат $xOy$ построим графики рассмотренных функций:




Заметим, что единственное решение исходная система имеет при пересечении графиков функций в одной точке, когда: 1) абсцисса точки пересечения принадлежит промежутку (1; 7] или 2) прямая $y = 3$ является касательной к окружности.

Определим параметр в каждом из перечисленных случаев:

1) (1; 0): $0 = a - 10a + 3;\ a = \frac{1}{3}$;

(7; 0): $0 = 7a - 10a + 3;\ a = 1$.

Т.к. $x$ принадлежит промежутку (1; 7], то $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

2) (0; 3): $3 = 3 - 10a;\ a = 0$.

**Ответ:** $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right] \cup \{0\}$.

Решение каждого задания требует к себе индивидуального подхода, но при этом задачи с параметрами чем-то похожи на детский конструктор. Разобрав много таких примеров, можно заметить, как решение «собирается» из мелких деталей – хорошо знакомых нам фактов.

Графический способ является наиболее наглядным, простым и доступным способом решения задач с параметрами. Если задачу с параметром можно

«нарисовать» – рисуем, т.е. применяем графический метод. «Размытость» в решении уравнения, неравенства или их системы с помощью графика, можно подкрепить аналитическим выводом, что поможет подтвердить правоту выбранного решения и ответа.

Сочетание аналитического способа решения с графической интерпретацией полученных результатов позволяет сделать процесс решения уравнений с параметрами более осознанным, способствуя при этом формированию элементов исследовательской деятельности.

Задачи с параметрами помогают в формировании логического мышления, в приобретении навыков исследовательской деятельности. Возможность и умение решать задачи с параметрами демонстрируют владение методами решения уравнений и неравенств, осмысленное понимание теоретических сведений, уровень логического мышления, стимулируют познавательную деятельность.

*Литература*

1. Еремина, Т.М. Математика. Профильный уровень / Т.М. Еремина. – М., 2017. – 350 с.
2. Ященко, И.В. Математика. Профильный уровень / И.В. Ященко. – М., 2023.

# Решение тригонометрических уравнений

*Баянкина Людмила Анатольевна*
*учитель математики*
*МБОУ «Лицей №124»*
*г. Барнаул*
*kurgina08@mail.ru*

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) впервые был проведён в 2001 году в нескольких субъектах Российской Федерации. В 2008 году его сдавали уже во всех регионах страны. В настоящее время ЕГЭ служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным экзаменом в ВУЗ.

За прошедшие 23 года в контрольно-измерительных материалах (КИМ) единого государственного экзамена по математике произошли существенные изменения. С 2001 года задания КИМ делились на три части: А, В и С. Часть А содержала тестовые задания с выбором ответа из предложенных вариантов. На каждое задание части В нужно было дать краткий ответ. Задания части С требовали записи развёрнутого решения. В 2010 году из КИМ были исключены задания с выбором ответа (часть А), упразднены названия частей В и С, появилась сплошная нумерация. А в 2015 году экзамен по математике был разделён на базовый и профильный уровни. Но, какие бы изменения ни вносились в ЕГЭ по математике, тригонометрические уравнения всегда присутствовали в КИМ.

Обратившись к Статистико-аналитическому отчету о результатах ГИА по образовательным программам среднего общего образования в 2023 г. в Алтайском крае, заметим, что

к решению тригонометрического уравнения (задание КИМ №12) не приступали – 39,4%, приступали и получили за свое решение 0 баллов – 25,64%, получили 1 балл – 5,2%, заработали 2 балла – 29,75 % выпускников 2023 года.

Тригонометрические уравнения относят к повышенному уровню сложности, поэтому неудивительно, что 16,63% выпускников группы, не преодолевших минимальный балл, приступили к задаче №12, но набрали 0 баллов и 96,43% выпускников группы, набравших от 81 до 100 баллов, получили максимальный балл за решение задания №12.

Анализ ответов обучающихся на задания с развернутым ответом позволил выделить наиболее типичные ошибки. Тригонометрическое уравнение в задании №12 КИМ 2023 года решалось методом разложения на множители. Наиболее часто выпускники ошибались при группировке слагаемых уравнения, при разложении на множители. Неоднократно встречались работы, в которых учащиеся:

- после разложения на множители выполнили сокращение на один из множителей, что привело к потере корней (учащиеся делили обе части уравнения на выражение с переменной, которое в задаче может обращаться в нуль);
- решая уравнение $sin^2x = 1$, переходили к уравнению $sinx = 1$, теряя уравнение $sinx = -1$.

Ежегодно среди типичных ошибок участников ЕГЭ по математике при решении №12 отмечается незнание тригонометрических формул, табличных значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций, неумение решать простейшие тригонометрические

уравнения общего и частного видов и т.д. Не стал исключением и 2023 год.

Охватить всё многообразие тригонометрических уравнений, которые предлагались на едином государственном экзамене, а также имеющихся в различных источниках в качестве тренировочных, в пределах одной статьи невозможно. Однако, предлагаю подборку уравнений, практика решения которых с учащимися 10-11 классов в рамках изучения раздела «Тригонометрия» школьного курса математики, подготовки к единому государственному экзамену поможет избежать перечисленных выше ситуаций и получить заслуженные результаты.

**Пример 1.** Решите уравнение $tgx = 2sinx$.

**Решение**.

$\frac{\sin x}{\cos x} = 2sinx$

*! $cosx \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$*

$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x = 0$

*! Если разделим обе части уравнения на $\sin x$, то будут потеряны корни уравнения $sinx = 0$. Поэтому перенесём $2sinx$ в левую часть уравнения и вынесем $\sin x$ за скобки.*

$sinx(\frac{1}{\cos x} - 2) = 0$

$sinx = 0$ или $\frac{1}{\cos x} - 2 = 0$

*! Приравнивая один из сомножителей к нулю, нужно убедиться, что при этом другой сомножитель имеет смысл. Так, если $sinx = 0$, то $cosx \neq 0$ по основному тригонометрическому тождеству $sin^2x + cos^2x = 1$.*

$x = \pi k, k \in Z,$ $\frac{1}{\cos x} = 2$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

**Ответ:** $\pi k, k \in Z$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

**Пример 2.** Решите уравнение

$$sin^2 2x = cos2x + 4\,sin^4 x.$$

**Решение**.

$sin^2 2x = cos2x + 4\,sin^4 x$

$\underline{4sin^2 xcos^2 x} - \underline{cos^2 x} + sin^2 x - 4sin^4 x = 0$

*! Применим формулы двойного аргумента $sin2x$, $cos2x$ и перенесём все члены уравнения в левую часть.*

$cos^2 x(4sin^2 x - 1) - sin^2 x(4sin^2 x - 1) = 0$

$(4sin^2 x - 1)(cos^2 x - sin^2 x) = 0$

*! Сгруппируем попарно слагаемые в левой части уравнения и вынесем за скобки одинаковые множители.*

$4sin^2 x - 1 = 0$ или $cos^2 x - sin^2 x = 0$

$sin^2 x = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $cos2x = 0$

$sinx = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad$ $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$

**Ответ**: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, n, k \in Z.$

*Уравнения для самостоятельного решения:*

а) $sin2x\ cosx - sinx + cos2x = 0.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ \ n, k \in Z.$

б) $\sqrt{3}cosx = sin^3 x + \sqrt{3}\,cos^3 x.$

Ответ: $\pi n, -\frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in Z.$

**Пример 3.** Решите уравнение $1 - sin2x = cosx - sinx.$

**Решение**.

$1 - sin2x = cosx - sinx$

$sin^2 x + cos^2 x - 2sinxcosx = cosx - sinx$

$(cosx - sinx)^2 = cosx - sinx$

*! Применим основное тригонометрическое тождество и формулу двойного аргумента $sin2x$. После этого к левой части можно применить формулу квадрата разности двух выражений.*

$(cosx - sinx)^2 - (cosx - sinx) = 0$

$(cosx - sinx)(cosx - sinx - 1) = 0$

$cosx - sinx = 0$ или $-sinx + cosx = 1$

$cosx = sinx;$ $\frac{1}{\sqrt{2}}sinx - \frac{1}{\sqrt{2}}cosx = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in Z;$ $sin\,(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

*! Если разделим обе части уравнения на выражение $cosx - sinx$, то будут потеряны корни уравнения $cosx = sinx$. Поэтому перенесем выражение $cosx - sinx$ в левую часть уравнения и вынесем его за скобки.*

Решение исходного уравнения:

$\frac{\pi}{4} + \pi m,\ 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, m, n, k \in Z.$

**Ответ**: $\frac{\pi}{4} + \pi m,\ 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, m, n, k \in Z.$

**Пример 4**. Решите уравнение

$$sin2x - 2\sqrt{3}sin^2x + 4cosx - 4\sqrt{3}sinx = 0.$$

**Решение**.

$sin2x - 2\sqrt{3}sin^2x + 4cosx - 4\sqrt{3}sinx = 0$

$\underline{2\ sinx\ cosx} - 2\sqrt{3}sin^2x + \underline{4cosx} - 4\sqrt{3}\ sinx = 0$

$2cosx(sinx + 2) - 2\sqrt{3}sinx(sinx + 2) = 0$

$(sinx + 2)\big(2cosx - 2\sqrt{3}sinx\big) = 0$

$sinx + 2 = 0$ или $2cosx - 2\sqrt{3}sinx = 0$

$sinx = -2$ $cosx - \sqrt{3}sinx = 0$

Т.к. $|\,sin\,x| \le 1,$ $\sqrt{3}\ tgx = 1$

то корней нет. $tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$

**Ответ**: $\frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$

*! Применим формулу двойного аргумента $sin2x$ и сгруппируем слагаемые попарно.*

*! $cosx - \sqrt{3}sinx = 0$ – однородное уравнение первой степени, если $cosx = 0$, то и $sinx = 0$, тогда не выполняется основное тригонометрическое тождество: $0^2 + 0^2 \neq 1$, поэтому $cosx \neq 0$. Разделим обе части второго уравнения на $cosx$.*

*Уравнения для самостоятельного решения:*

а) $cos2x = cosx + sinx.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, 2\pi t, k, m, t \in Z.$

б) $sin2x + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}.$

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, m, k \in Z.$

Рассмотрим тригонометрические уравнения, при решении которых необходимо обращать внимание на область допустимых значений уравнения.

**Пример 5**. Решите уравнение $(ctgx - ctg^2x)\sqrt{2sinx} = 0.$

**Решение**.

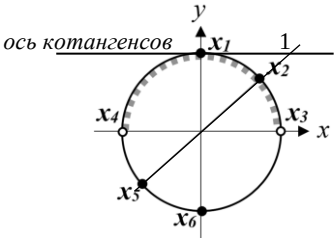
$(ctgx - ctg^2x)\sqrt{2\,sin\,x} = 0$

$\begin{cases} ctgx - ctg^2x = 0 \\ 2\,sin\,x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2\,sin\,x = 0 \\ sin\,x \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} ctgx(1 - ctgx) = 0 \\ sin\,x > 0 \end{cases}$ решений нет

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ctgx = 0 \\ 1 - ctgx = 0 \end{array}\right. \\ sin\,x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} ctgx = 0 \\ ctgx = 1 \end{array}\right. \\ sin\,x > 0 \end{cases}$




Получаем две серии корней исходного уравнения:

*! Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл. Поэтому* $sin\,x \geq 0$.

*!* $ctgx = \frac{cos\,x}{sin\,x} \Rightarrow sinx \neq 0.$

*Таким образом, ОДЗ уравнения – это все значения переменной x, при которых* $sin\,x > 0$.

*Выделим на единичной окружности дугу, соответствующую условию* $sin\,x > 0$, *и отметим полученные множества.*

*По единичной окружности устанавливаем, что множества чисел* $x_3$, $x_4$, $x_5$,

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z,$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$

*$x_6$ не удовлетворяют условию $\sin x > 0$.*

**Ответ**: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$.

**Пример 6**. Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4sin^2 \frac{x}{2}$.

**Решение**.

$$\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4sin^2\ \frac{x}{2}$$

*! $cos^2\ \frac{x}{2} \neq 0$, так как делить на нуль нельзя, то есть $x \neq \pi + 2\pi m, m \in Z$.*

$$\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 4sin^2\ \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{\sin x - 4\ sin^2\ \frac{x}{2} cos^2 \frac{x}{2}}{cos^2 \frac{x}{2}} = 0$$

*! Перенесем $4\ sin^2\ \frac{x}{2}$ в левую часть уравнения, приведём к общему знаменателю.*

$$\frac{\sin x - \sin^2 x}{cos^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} sin\, x - sin^2\, x = 0 \\ cos^2\ \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

*Рассмотрим числитель получившейся дроби. Он равен нулю, так как дробь равна нулю. Условие, что знаменатель не обращается нуль, мы записали в систему сразу.*

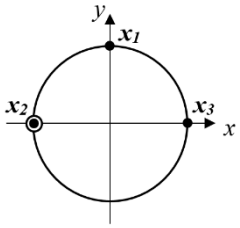
$$\begin{cases} sin\, x(1 - sin\, x) = 0 \\ cos^2\ \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ sinx = 1 \end{array}\right. \\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \end{cases}$$

*! На единичной окружности «выколем» значения $x = \pi + 2\pi m, m \in Z$ и отметим точки, найденные при решении уравнения $sin\, x - sin^2\, x = 0$.*

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi m, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi m, m \in Z \end{cases}$$

Покажем полученные множества на окружности:




*На единичной окружности видим, что множество $x_2$ не удовлетворяет условию $x \neq \pi + 2\pi m, m \in Z$.*

Запишем серии корней:

$x_3 = 2\pi n, n \in Z, x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

**Ответ**: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in Z.$

*Уравнения для самостоятельного решения:*

а) $\frac{sin^2 x}{\sin\frac{x}{2}} = cos\frac{x}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ \pi + 2\pi n,\ k, m, n \in Z.$

б) $\frac{4cos^2 x + 8\sin x - 7}{\sqrt{-tg\,x}} = 0.$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z.$

Представленные в статье уравнения и их решения – это лишь малая часть множества разнообразных тригонометрических уравнений. Через эти уравнения продемонстрировано то, как можно избежать типичных ошибок, которые выпускники совершали при решении задания №12 на ЕГЭ по математике в 2023 году. Как говорят сами выпускники, для успешного выполнения задания №12 на ЕГЭ необходимо не просто овладеть основными методами решения тригонометрических уравнений, но и постоянно практиковаться в их решении. В настоящее время в свободном доступе, помимо школьного курса математики, огромное количество учебной информации по данному вопросу: теоретический материал, богатая база тригонометрических уравнений, а также видеоразборы решений, видеокурсы и др. Нужно лишь проявить трудолюбие, набраться терпения и тогда результаты экзамена не разочаруют ни учеников, ни их родителей, ни учителей!

*Литература*

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1969. – 416 с.
2. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2023. Профильный уровень. Книга 2 / Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2023. – 232 с.
3. Мордкович А.Г. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2-х ч. Ч.1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 9-е изд. – М.: Мнемозина, 2020. – 455 с.
4. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для общеобразоват. организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 2 / Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. – 9-е изд. – М.: Мнемозина, 2020. – 351 с.
5. Статистико-аналитический отчет о результатах ГИА по образовательным программам СОО в 2023 г. [Электронный ресурс]. – URL: https://iro22.ru/dejatelnost/gia/ (дата обращения: 29.05.2024).

# РАЗДЕЛ 2. Обучение школьников решению геометрических задач

## Метод объемов

*Рубцова Татьяна Геннадьевна*
*учитель математики*
*МБОУ Калманская средняя*
*общеобразовательная школа*
*имени Г.А. Ударцева,*
*с. Калманка*
*tangen-64@mail.ru*

В школьном курсе стереометрии есть несколько типов задач, которые рациональнее решать методом объемов. Этот метод состоит в следующем: выражая объем какого-нибудь тела двумя способами и приравнивая полученные величины, получаем требуемый результат. Данный метод может помочь в случаях, если требуется найти:

- расстояние от точки до плоскости;
- угол между прямой и плоскостью;
- расстояние между скрещивающимися прямыми;
- угол между плоскостями.

В рассматриваемых ниже случаях мы будем искать объём треугольной пирамиды. Уникальность этой пирамиды состоит в том, что в качестве основания можно брать любую ее грань.

## Расстояние от точки до плоскости

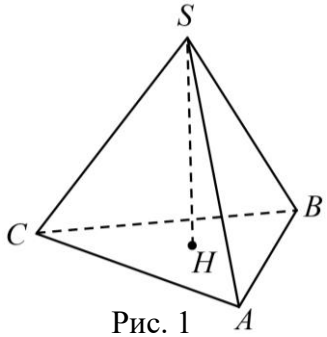



Рис. 1

Расстояние от точки до плоскости всегда может быть представлено как длина высоты пирамиды (рис.1). Для её нахождения используется формула: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$.

**Задача 1.** В пирамиде *SABC* площадь основания ABC равна 12, а высота, проведенная к этому основанию, равна 5. Найдите расстояние от точки C до плоскости SAB, если площадь грани SAB равна 10.

**Решение.**

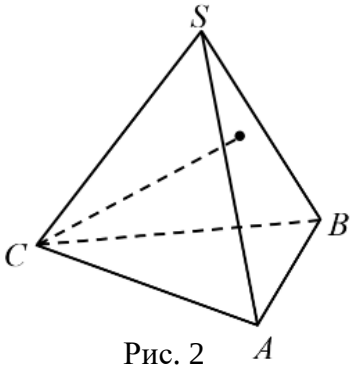



Рис. 2

Найдем объем пирамиды *SABC* (рис. 2).

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5 = 20.$$

С другой стороны, мы можем за основание пирамиды взять грань SAB, тогда объем пирамиды можно выразить так: $V = \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot \rho\big(C; (SAB)\big)$,

где $\rho\big(C; (SAB)\big)$ – расстояние от точки $C$ до

плоскости $SAB$, которое равно высоте пирамиды.

Получим $20 = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \rho\big(C; (SAB)\big) \Rightarrow \rho\big(C; (SAB)\big) = 6.$

**Ответ**: 6.

**Задача 2.** Основанием пирамиды SABC является равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 8. Высота SH равна $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки C до плоскости SAB (рис. 3), если AS = BS = 5.

**Решение.**

$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 32$

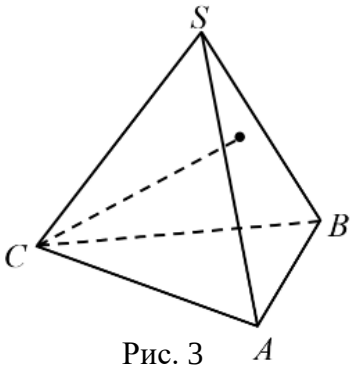



Рис. 3

$V = \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot \rho\big(C; (SAB)\big),$

$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{25 - 16} = 12.$

Получим $32 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \rho\big(C; (SAB)\big).$

Следовательно, $\rho\big(C; (SAB)\big)=8.$

**Ответ**: 8.

**Задача 3.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: AB=1, AD=$\sqrt{3}$, $AA_1$=$\sqrt{6}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости $AB_1C$ (рис. 4) [5].

**Решение.**

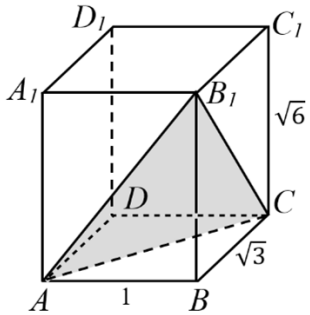



Рис. 4

$$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$AB_1 = \sqrt{7}, CB_1 = 3, AC = 2.$

Следовательно, $S_{ACB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (по формуле Герона).

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \rho(B; AB_1C).$$

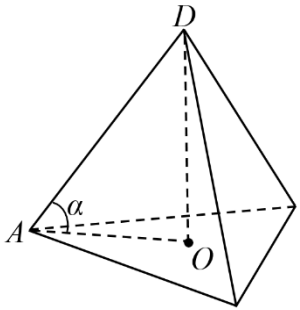
Следовательно, $\rho(B; AB_1C) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Ответ**: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

## Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью может быть вычислен через расстояние от точки до плоскости.

$$sin\alpha = \frac{DO}{DA}$$




**Задача 4.** В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания $ABC$ равна 12, высота пирамиды равна 5. Площадь грани $SAB$ равна 10. Найдите угол между прямой $AC$ и плоскостью $SAB$, если $AC = 8$.

**Решение.**

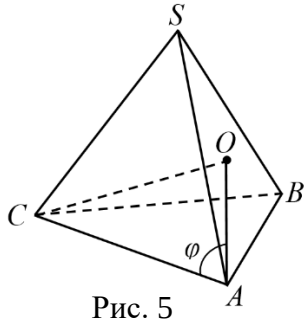


Рис. 5

Угол между прямой и плоскостью равен углу между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 5). Мы не знаем точного расположения проекции, но можем вычислить угол, используя метод объемов.

$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 5=20.$

$V=\frac{1}{3}S_{SAB}\cdot CO.$

Из двух равенств следует: $CO=6.$

$\sin\varphi=\frac{CO}{CA}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, откуда $\varphi=arcsin\frac{3}{4}$.

**Ответ**: $arcsin\frac{3}{4}$.

**Задача 5.** В пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник $ABC$, сторона которого равна 8. Высота, опущенная из вершины $S$, равна $\sqrt{6}$. Найдите угол между прямой $BC$ и плоскостью $SAB$ (рис. 6), если $AS=BS=5$.

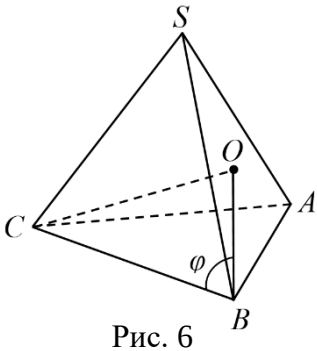


Рис. 6

**Решение.**

$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 16\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=16\sqrt{2}$

В $\Delta SAB$: $SA=SB=5, AB=8.$

Следовательно, $S_{SAB}=12$ (по формуле Герона).

$V=\frac{1}{3}S_{ABS}\cdot CO$

$16\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot CO, CO = 4\sqrt{2}.$

$sin\varphi = \frac{CO}{CB} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \varphi = 45^0.$

**Ответ**: $45^0$.

## Расстояние между скрещивающимися прямыми

При нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми может помочь следующая формула для объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{6} ab\, \rho(a; b) \sin \angle(a; b),$$

где $a$,$b$ – длины скрещивающихся ребер, $\rho$ – расстояние между ними (рис. 7) [5].

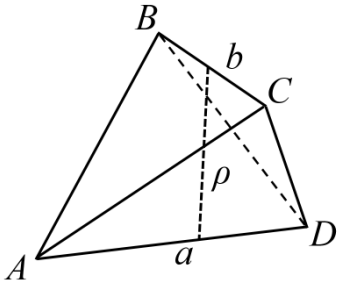


Рис. 7

Вывод этой формулы можно найти в источнике [5].

**Задача 6.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной $S$) сторона основания равна $\sqrt{10}$, а боковое ребро равно 5. Найдите расстояние между прямыми $AS$ и $BC$ (рис. 8).

**Решение.**

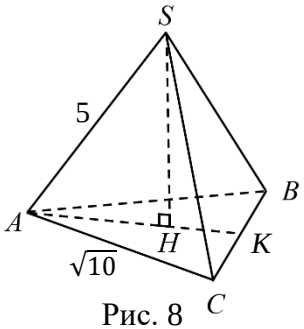


Рис. 8

$V = \frac{1}{6} AS \cdot BC \cdot \rho(AS; BC) \cdot \sin\angle(AS; BC)$

$AS \perp BC$ (Докажите!) Следовательно, $\sin \angle(AS; BC) = 1$.

$\rho(AS; BC) = \frac{6V}{AS \cdot BC}$

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot SH.$

Найдём $SH$.

$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{10 - \frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$ (из прямоугольного треугольника $ACK$ по теореме Пифагора).

$AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$.

Тогда $SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{25 - \frac{30}{9}} = \sqrt{25 - \frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}$ (из прямоугольного треугольника $SAH$ по теореме Пифагора).

Тогда $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{65}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{65}}{6}$.

Следовательно, $\rho(AS; BC) = \frac{6 \cdot \frac{5\sqrt{65}}{6}}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{65}}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{10}} = \sqrt{6{,}5}$.

**Ответ**: $\sqrt{6{,}5}$.

**Задача 7.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9) все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми $AC$ и $BC_1$ равен 60°.

б) Найдите расстояние между прямыми $AC$ и $BC_1$.

**Решение.**

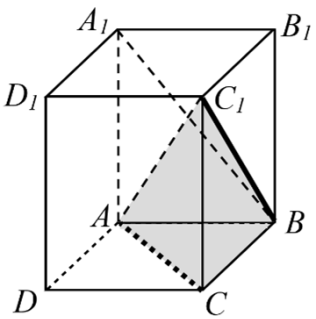


Рис. 9

а) $A_1C_1 = A_1\text{B} = C_1\text{B} = 6\sqrt{2}$. Следовательно, $\Delta A_1BC_1$ – равносторонний; $\angle A_1C_1B = 60°, A_1C_1 || AC$ откуда $\angle(AC; BC_1) = 60°$.

б) $V_{C_1ABC} = \frac{1}{6}AC \cdot BC_1 \cdot \rho(AC; BC_1) \cdot sin60°$.

$V_{C_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$.

Следовательно, из двух равенств получаем:

$$36 = \frac{1}{6} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \rho(AC; BC_1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Поэтому $\rho(AC; BC_1) = 2\sqrt{3}$.

**Ответ**: $2\sqrt{3}$.

**Задача 8.** Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с прямым углом $C$ (рис. 10). Грань $ACC_1A_1$ является квадратом.

а) Докажите, что прямые $CA_1$ и $AB_1$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми $CA_1$ и $AB_1$, если $AC = 4$, $BC = 7$ [3].

**Решение.**

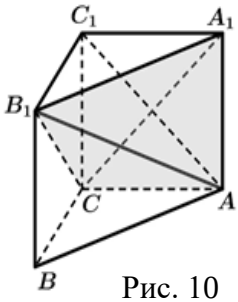



Рис. 10

а) $ACC_1A_1$ – квадрат $\Rightarrow AC_1 \perp CA_1$

$AC_1 \perp CA_1 \Rightarrow AB_1 \perp CA_1$ (по теореме о трех перпендикулярах: $AB_1$ – наклонная, $CA_1$ – проекция наклонной)

б) $V_{B_1ACA_1} = \frac{1}{6} \cdot AB_1 \cdot CA_1 \cdot \rho(CA_1; AB_1)$

$V_{B_1ACA_1} = \frac{1}{3} S_{ACA_1} \cdot B_1C_1 = \frac{8 \cdot 7}{3} = \frac{56}{3}$.

$\frac{56}{3} = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \rho(CA_1; AB_1) \Rightarrow \rho(CA_1; AB_1) = \frac{14\sqrt{2}}{9}$.

**Ответ**: $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

## Угол между плоскостями

При вычислении угла между плоскостями может оказаться полезной следующая формула для объёма

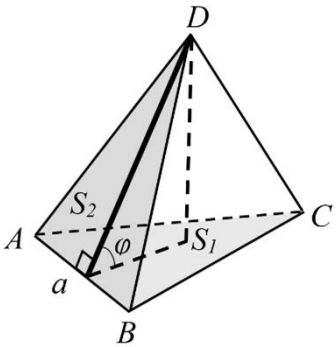


Рис. 11

треугольной пирамиды:

$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S_1 \cdot S_2}{a} \cdot sin\varphi$, где $S_1, S_2$ – площади смежных граней, $a$ – их общее ребро, φ – угол между гранями (рис. 11) [5]. Вывод этой формулы можно найти в источнике [5].

**Задача 9.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 1, AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостями $AB_1C$ и $ABC$ (рис. 12).

**Решение**.

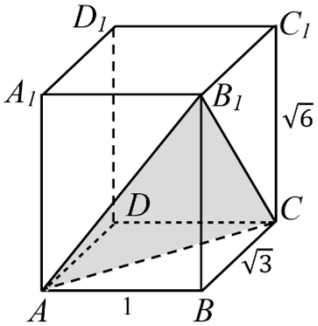


Рис. 12

$V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$AB_1 = \sqrt{7}, CB_1 = 3, AC = 2$.

Следовательно, $S_{ACB_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (по формуле Герона).

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot sin\varphi$.

Следовательно, $sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**Ответ**: $arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

*Задачи для самостоятельного решения*

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, а высота $\sqrt{2}$. Найдите

расстояние от вершины $A$ до плоскости $BDM$, где точка $M$ – середина ребра $CC_1$ [2].

Ответ: 0,5.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием $ABC$ боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.

   а) Докажите, что $AS \perp BC$

   б) Найдите расстояние от вершины $A$ до плоскости $SBC$ [3].

   Ответ: $\frac{3\sqrt{39}}{4}$.

3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной $S$ на сторонах $AB$ и $AC$ выбраны точки $M$ и $K$ соответственно так, что треугольник $AMK$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{2}{3}$. На прямой $MK$ выбрана точка $E$ так, что $ME:EK = 7:9$. Найдите расстояние от точки $E$ до плоскости $BSC$, если сторона основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $\sqrt{6}$ [3].

   Ответ: $\sqrt{2}$.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной $S$, со стороной основания, равной $4\sqrt{2}$ и боковым ребром 5 найти угол между прямой $AB$ и плоскостью, проходящей через середины $BC$ и $DC$ и вершину $S$ [4].

   Ответ: $arcsin\frac{3}{\sqrt{26}}$.

5. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми $SB$ и $AF$ [1].

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми $SA$ и $CD$ [1].

   Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

*Литература*


1. Бурковская, Н.Д. Площадь поверхности и объем шара и его частей / Н.Д. Бурковская – URL: https://tetradkin-grad.ru/images/dokumenty/Metod-obyemov.pdf (дата обращения 29.05.2024).
2. Математика. ЕГЭ 2019. Книга 2. Профильный уровень. Решебник / Д.А. Мальцев, А.А. Мальцев, Л.А. Мальцева – Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д. А.; Народное образование, 2019.
3. Сдам ГИА. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=504416 (дата обращения 29.05.2024).
4. Тема 4. Задачи по стереометрии. Метод объемов (Школково). – URL: https://3.shkolkovo.online/catalog/4173?SubjectId=1 (дата обращения 29.05.2024).
5. Яковлев, И.В. Метод объемов / И.В. Яковлев // Материалы по математике. MathUs.ru. – URL: https://mathus.ru/math/vol.pdf (дата обращения 29.05.2024).

# Решение геометрических задач методом дополнительных построений

*Положеева Лариса Юрьевна*
*larisa.polozheeva@mail.ru;*

*Сметанникова Елена Викторовна*
*elena_vik_smet@mail.ru*
*учителя математики*
*МБОУ «Гимназия № 42»*
*г. Барнаул*

По мнению М.А. Холодной, деятельность учителя направлена «не столько на трансляцию знаний и способов познания, сколько на «выстраивание» с помощью определенного учебного материала арсенала субъективных средств продуктивного интеллектуального отношения к действительности» [2, с. 311]. Во многом именно в этом, на наш взгляд, содержится суть системно-деятельностного подхода, являющегося ключевым в реализации современных ФГОС.

Учитель, выполняя задачное структурирование образовательного материала, формирует систему учебных задач, позволяющих ученику самостоятельно создать ориентировочную основу действий для выполнения определенного вида заданий. Как правило, выстраивание учащимися ориентировочной основы действий реализуется при изучении курса алгебры. Недаром алгебра очень часто воспринимается школьниками как набор неких алгоритмов (правила раскрытия скобок, решение квадратных уравнений,

решение неравенств и т.д.), знание которых гарантирует успешное освоение предмета. Возможно, именно поэтому алгебра ученикам кажется проще и понятнее геометрии.

Решение геометрической задачи многими учащимися воспринимается словно набор «магических» действий. Однако при решении геометрических задач тоже существуют некие алгоритмы, просто они не столь конкретны как в алгебре, поэтому будем называть их идеями решения задач. Идей решения геометрических задач достаточно большое количество, но ключ к успеху – систематизация этих идей в каждой изучаемой теме, а затем и в курсе всей геометрии.

Главный вопрос, ответ на который должны знать школьники после изучения той или иной геометрической темы: «Зачем это нужно знать?». Например, изучив в 7 классе признаки равенства треугольников, ученики должны понимать, что если в задаче просят доказать равенство отрезков или углов в некоторой геометрической конструкции, то одна из идей решения задачи, которую нужно проверить – это поиск равных треугольников, соответственными элементами которых являются данные отрезки или углы. После изучения свойств равнобедренного треугольника у школьника появляется еще одна идея решения задач на доказательство равенства отрезков и углов: если нужно доказать равенство углов, проверь можно ли выделить треугольник, в который входят эти углы (идея вспомогательного треугольника). Таким образом, при изучении геометрии, у школьника формируется банк идей решения задач того или иного вида, каждая из которых может быть зафиксирована словесно или рисунком (геометрической конструкцией).

Примеры идей решения задач, содержащих вопрос

«докажите равенство отрезков/углов»:

- равные треугольники, соответственными сторонами которых являются данные отрезки/углы,
- вспомогательный треугольник, сторонами которого являются отрезки/углы (согласование условий в треугольнике),
- транзитивность (существование отрезка/угла, равного каждому из данных),
- вспомогательный параллелограмм; согласование условий в параллелограмме (противоположные стороны/углы; диагонали прямоугольника; стороны ромба; углы при параллельных прямых),
- вспомогательная окружность (отрезки являются радиусами окружности, углы равны половине одной и той же дуги).

Выделение идей решения геометрических задач позволяет учащимся понять структуру геометрии и механизм решения задач.

Метод дополнительного построения в геометрии – один из самых сложных и непонятных для учащихся при решении задач, на наш взгляд. Данный метод является аналогом задания для детей, в котором просят дорисовать некую картинку, и каждый ребенок дорисовывает ее в соответствии с уровнем своего кругозора, фантазии, эмоционального состояния и т.д. Так и в геометрии, чтобы ученик понимал до чего достроить, необходимо, чтобы он ранее встречался с предполагаемыми конструкциями и понимал их идейное содержание.

Формирование у учащихся навыков использования метода дополнительного построения происходит в несколько этапов:

– определить идею решения предложенной задачи и ход её реализации;
– умение дополнить (при необходимости) предложенную конструкцию новыми (вспомогательными) элементами до ранее известной.

Продемонстрируем схему формирования у школьников навыка использования метода дополнительного построения при решении геометрических задач на отыскание отношения отрезков.

После введения понятия подобных треугольников и изучения признаков подобия конструируются типичные рисунки (рис. 1, рис. 2), содержащие подобные треугольники, и внимание учащихся акцентируется на связи подобия треугольников и параллельности прямых (идеи антипараллельности вводятся позже).

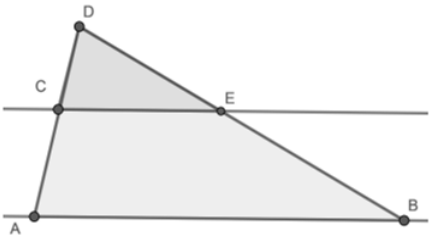


Рис. 1

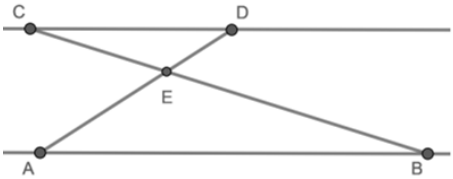


Рис. 2

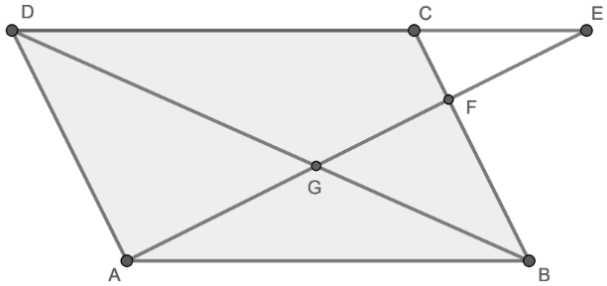
На этом этапе школьникам могут быть предложены задачи, в которых требуется дополнить геометрический рисунок таким образом, чтобы получить подобные треугольники.

Целесообразно соотнесение двух идей решения геометрических задач: «Если нужно доказать равенство отрезков – выделяй равные треугольники, если нужно найти

отношение отрезков – выделяй подобные треугольники».

Следующий этап предполагает решение задач двух видов, в зависимости от полноты чертежей к ним. На чертеже к первой задаче продемонстрировано наличие полной конструкции, необходимой для её решения. При анализе чертежа ко второй задаче ученику нужно предложить дополнить чертеж таким образом, чтобы получить задачу, аналогичную первой.

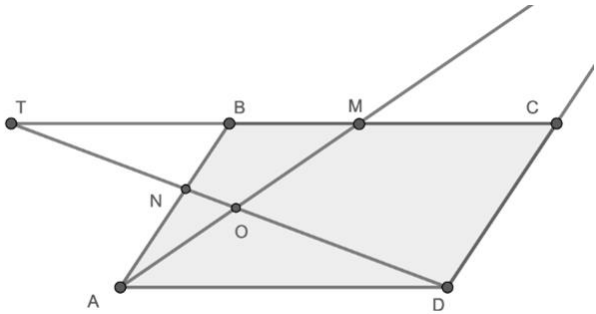
**Пример 1.**




На продолжении стороны $DC$ параллелограмма $ABCD$ отметили точку $E$. Прямая $AE$ пересекает сторону $BC$ и диагональ $DB$ в точках $F$ и $G$ соответственно. Найдите отношение $BG:DG$, если $BF:FC = 3:5$.

Отношение отрезков можно определить, к примеру, из подобия треугольников $AGB$ и $EGD$, предварительно рассмотрев подобие треугольников $AFB$ и $EFC$.

**Пример 2.**




На сторонах AB и BC параллелограмма ABC$D$ расположены точки $N$ и $M$ соответственно, причём $AN:NB = 3:2, BM:MC = 2:5$. Прямые $AM$ и $DN$ пересекаются в точке O. Найдите отношения $OM:OA$, $ON:OD$.

Для нахождения отношения $OM:OA$ нужно найти подобные треугольники, соответственными сторонами которых являются данные отрезки.

**Нужно дополнить до ключевого рисунка 2.**

Продолжить $DN$ до пересечения с BC в точке $T$. Пусть $BM = 2a, CM = 5a$. Из подобия треугольников $TNB$ и $DNA$ находим:

$$TB = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}\cdot 7a = \frac{14}{3}a.$$

Из подобия треугольников $TOM$ и $DOA$:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{TM}{AD} = \frac{\frac{14}{3}a+2a}{7a} = \frac{20}{21}.$$

Аналогично находим, что $ON:OD = 6:35$.

Следует обратить внимание школьников на то, что данная задача может быть решена с применением теоремы Менелая, алгебраическим методом, однако, как отметил И.Ф. Шарыгин «…главным действующим лицом геометрии

должна быть фигура, а главным средством обучения – рисунок, картинка» [3]. Для развития интереса учащихся к изучению геометрии, следует работать над наглядностью и конструктивностью преподавания предмета.

Следующий этап освоения метода дополнительного построения состоит в решении задач, в которых нужно построить параллельную прямую.

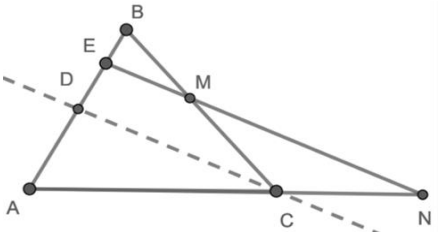
Вариантов построения параллельной прямой может быть много, однако следует выбрать наиболее рациональный. Рациональность выбора определяется, на наш взгляд, целью: согласовать все отношения, построив их на одной из сторон треугольника или реализовать идею транзитивности отношений, рассмотрев несколько пар подобных треугольников.

**Пример 3.**

Дан треугольник ABC. На продолжении стороны $AC$ за точку $C$ взята точка $N$, причем $AC = 2CN$. Точка $M$ находится на стороне $BC$, причем $BM{:}\,MC = 1{:}\,3$. В каком отношении прямая $MN$ делит сторону $AB$?

**Решение.**

*1 способ (идея согласования отношений на одном отрезке).*




Нужно найти отношение, на которое делится отрезок $AB$, значит, нужно согласовать отношения на отрезке $AB$.

Дополнительное построение: проведем прямую $CD$ параллельную $MN$, пересекающую сторону $AB$ в точке $D$.

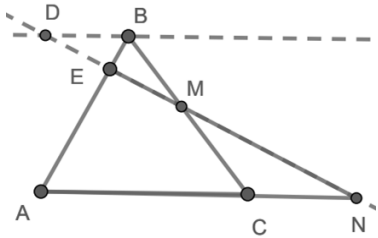
По теореме о пропорциональных отрезках:

Угол $DBC, EM \parallel DC$, значит, $BM: MC = BE: ED = 1: 3$ (1).

Угол $EAN, DC \parallel NE$, значит, $AC: CN = AD: DE = 2: 1$ (2).

Из утверждений (1) и (2) следует, что $AE: BE = 9: 1$.

*2 способ (идея транзитивности).*




Требуется найти отношение, на которое делится отрезок $AB$, значит, нужно построить два подобных треугольника таким образом, чтобы каждая из частей стороны $AB$ была стороной одного из подобных треугольников.

Дополнительное построение: прямая $DB$ параллельная стороне $AC$.

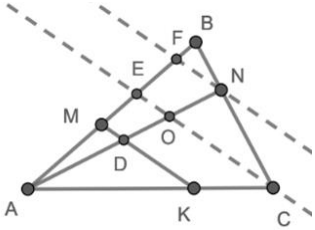
Из подобия треугольников $NCM$ и $DBM$ следует, что $CM: MB = CN: DB = 1: 3$. Из подобия треугольников $DBE$ и $NAE$ следует, что $BD: AN = BE: AE = 1: 9$.

**Пример 4.**

На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $M, N$ и $K$ так, что $AM: MB = 2: 3$, $AK: KC = 2: 1, BN: NC = 1: 2$. В каком отношении прямая $MK$ делит отрезок $AN$?

**Решение.**

*1 способ (идея согласования отношений на одном отрезке).*




Нужно найти, в каком отношении прямая $MK$ делит отрезок $AN$, согласуем известные отношения на отрезке $AN$.

Дополнительное построение: $CE||MK||NF$.

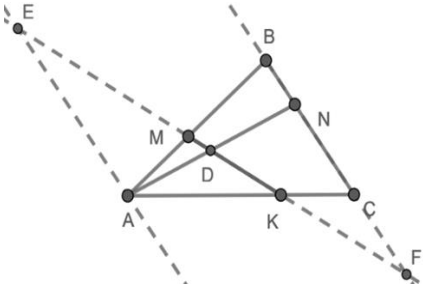
Угол $ABC, FN||CE$, значит, $BN$:$NC$=$BF$:$FE$=1:2.

Угол $BAC, MK||CE$, значит, $AM: ME = AK: KC = 2: 1$.

Таким образом, получаем $AM: ME: EF: FB = = 6: 3: 4: 2, AM: MF = 6: 7$.

Угол $BAN, MD||NF$, значит $AD: DN = AM: MF = 6: 7$.

*2 способ (идея транзитивности).*




Требуется построить два подобных треугольника, соответственными сторонами которых являются отрезки $AD$ и $DN$.

Дополнительное построение: $AE \,||\, BC$.

Из подобия треугольников $AKE$ и $CKF$ следует, что $AK: KC = AE: CF = 2: 1$ (1).

Из подобия треугольников $AME$ и $BMF$ следует, что $AE: BF = AM: MB = 2: 3$ (2). Из (1) и (2) с учетом условия $BN: NC = 1: 2$ следует, что $AE: FM = 6: 7$.

Из подобия треугольников $EAD$ и $FND$ следует, что $AE:FN = AD:DN = 6:7$.

*Задачи для самостоятельного решения*

1. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ расположены точки $N$ и $M$ соответственно, причем $AN:NB = 3:2, AM:MC = 4:5$. Прямые $BM$ и $CN$ пересекаются в точке $O$. Найдите отношение $OM:OB$ и $ON:OC$.

Ответ: 5 : 6, 8 : 25.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ $(AB = BC)$ на стороне $BC$ взята точка $D$ так, что $BD:DC = 1:4$. В каком отношении прямая $AD$ делит высоту $BE$ треугольника $ABC$, считая от вершины $B$?

Ответ. 1 : 2.

3. В треугольнике $ABC$, площадь которого равна 6, на стороне $AB$взята точка $K$, делящая эту сторону в отношении $AK:BK = 2:3$, а на стороне $AC$ взята точка $L$, делящая $AC$ в отношении $AL:LC = 5:3$. Точка $Q$ пересечения прямых $CK$ и $BL$ отстоит от прямой $AB$ на расстоянии 1,5. Найдите сторону $AB$.

Ответ: 4.

Таким образом, для формирования умения применять метод дополнительного построения, сначала нужно научить классифицировать задачи в соответствии с идеями их решения, анализировать сложные конструкции, выделяя их элементы и лишь потом приступать к решению задач. При этом следует обращать внимание на вариативность решения задачи, развивая не только надситуативную активность, выражающуюся в умении школьников выйти за границы заданной в задаче конструкции, но и дивергентные способности (т.е. умение решать задачу разными способами).

*Литература*

1. Гордин, Р.К. ЕГЭ 2018. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2018. – 224 с.
2. Холодная, М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – Москва: Изд-во «Барс». 1997. – 392 с.
3. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе 21 века Геометрия // Математика. – 2004. – № 12. – С. 2-5.

## Применение теоремы Менелая при решении геометрических задач

*Кардакова Юлия Ивановна*
*учитель математики*
*МБОУ «Сорочелоговская СОШ»*
*с. Сорочий Лог*
*card.ui@mail.ru*

В современном школьном математическом образовании отдельное, важное место занимает геометрия как предмет, вызывающий у обучающихся сложности в его изучении. Многолетний анализ результатов ГИА по математике показывает, что процент выполнения геометрических заданий очень низкий. Проблемы видятся в следующем:

- необходима большая теоретическая база для доказательств и решения;
- отсутствие четкого алгоритма выполнения заданий;

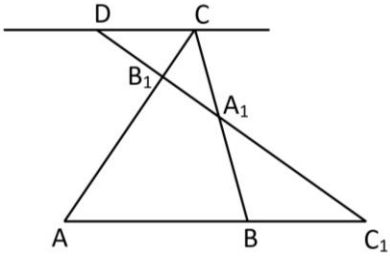
– плохо развитое логическое и пространственное мышление учащихся.

На помощь при решении геометрических задач приходят опорные задачи, т.е. задача-факт или задача-доказательство. Большинство таких задач на ГИА принимаются без доказательства и успешно применяются учащимися. Одна из таких задач – теорема Менелая. Много лет эта теорема изучалась в курсе углубленного изучения математики в 9 классе, в дополнительных главах в 10 классе, а также при подготовке к олимпиадам различного уровня. Учащиеся при подготовке к ЕГЭ могли даже не знать о теореме Менелая и успешно сдавать экзамен, но за прошедшие пять лет стали появляться задания на применение этой теоремы (2020 г., 2022 г.) как в планиметрической задаче, так и стереометрической. Таким образом, пришло время для освоения этой задачи-факта всеми учащимися.

Чаще всего для решения геометрической задачи есть несколько способов и нельзя сказать, что задания, встречающиеся на ЕГЭ нельзя решить другими способами, без применения теоремы Менелая. Решить можно, но придется использовать нелюбимое подобие и не один раз, или несколько раз теорему Фалеса, а также выполнять дополнительные построения. Исключительность теоремы Менелая состоит, во-первых, в возможности заменить несколько шагов на один, во-вторых, в сведение решения геометрической задачи к решению алгебраической пропорции. Итак, формулировка.

**Теорема Менелая**: Если прямая пересекает стороны или продолжения сторон $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ соответственно в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, то имеет место равенство

$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$




**Доказательство**.

Проведём $CD \parallel AB$. Рассмотрим треугольник $A_1BC_1$ и треугольник $A_1CD$.

$\angle DA_1C = \angle C_1A_1B$ как вертикальные. $\angle D = \angle C_1$ (накрест лежащие при $CD \parallel A_1C$ и секущей $C_1D$). Следовательно, треугольник $A_1BC_1$ подобен треугольнику $A_1CD$. Стороны подобных треугольников пропорциональны $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{DC}$.

Рассмотрим $\Delta B_1AC_1$ и $\Delta B_1CD$.

$\angle DB_1C = \angle AB_1C_1$ (вертикальные). $\angle D = \angle C_1$ (накрест лежащие при $CD \parallel AC_1$ и секущей $C_1D$). Следовательно, $\Delta B_1AC_1$ подобен $\Delta B_1CD$. Значит, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{DC}{AC_1}$. Получилось два равенства $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{DC}$ и $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{DC}{AC_1}$. Перемножим почленно эти равенства: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC_1}{DC} \cdot \frac{DC}{AC_1}$. Получим $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC_1}{AC_1}$.

Воспользуемся свойством дробей: «если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = 1$». Имеем $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$.

Теорема доказана.

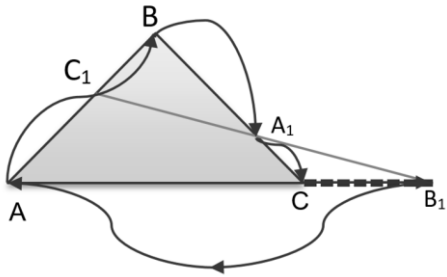
Доказательство остаётся в силе и в том случае, когда все три точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на продолжениях сторон треугольника $ABC$.

Справедлива и **обратная теорема:** Пусть дан $\Delta ABC$ и точка $C_1$ лежит на стороне $AB$, точка $A_1$ – на стороне $BC$, а точка $B_1$ – на продолжении стороны $AC$, причём выполняется соотношение $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Тогда точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой.

Равенство теоремы Менелая заменяет двойное доказательство подобия, а обратная теорема является одним из средств доказательства принадлежности точки прямой. Эта замечательная теорема.

Ещё одно доказательство прямой теоремы Менелая, красивое и компактное предлагает основатель онлайн-школы «Школково» Коваль М.О. («Теорема Менелая. ЕГЭ 2020 по профильной математике»; http://surl.li/pgpoyh). Это доказательство позволяет увидеть замену двух пропорций одним равенством теоремы Менелая [1].

При изучении теоремы Менелая необходимо начинать с записи равенства.

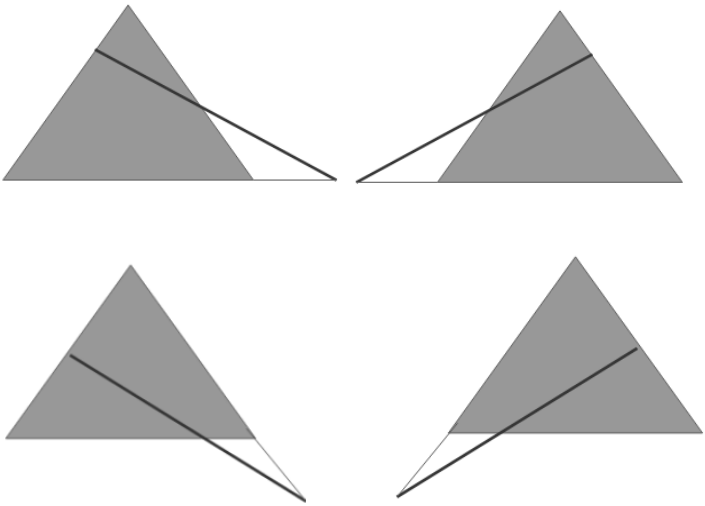



Начинать обход можно с любой точки, но необходимо чередование: вершина – точка – вершина – точка – вершина – точка: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1\mathrm{C}} \cdot \frac{CB_1}{B_1\mathrm{A}} = 1$.

Следующие упражнения можно предложить учащимся для формирования умения записывать равенство

теоремы Менелая.

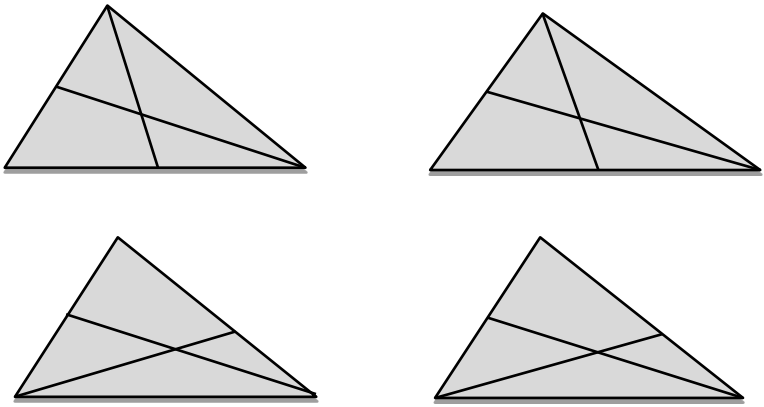
**Упражнение 1.** Обозначьте треугольник и точки пересечения прямой со сторонами треугольника или их продолжениями. Запишите теорему Менелая для этих треугольников.



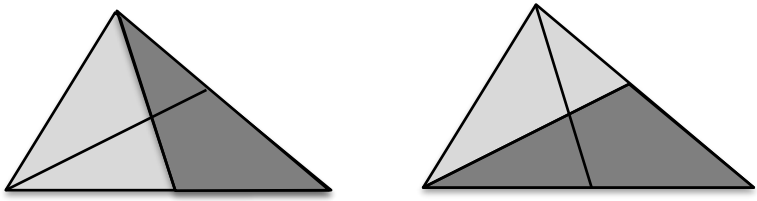
Очередным этапом в формировании умения применять теорему Менелая является её распознавание в задачах.

**Упражнение 2.** На заданных чертежах найти два возможных применения теоремы Менелая. Записать для каждого случая равенство.

**Ориентировочная основа действий** (ООД – на современном сленге «лайфхак»): вычленяем треугольник, у которого прямой пересечены две стороны.



Образец:



Алгоритм применения теоремы Менелая:

1. Увидеть треугольник, в котором прямая, пересекает две стороны этого треугольника и продолжение третьей (возможно несколько прямых).

2. Выбрать треугольник, в котором даны какие-то отношения или отрезки.

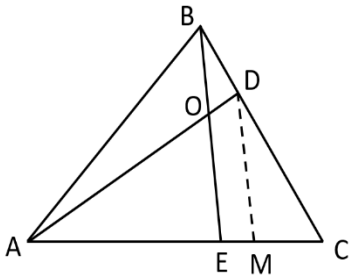
3. Составь равенство: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1\mathrm{C}} \cdot \frac{CB_1}{B_1\mathrm{A}} = 1.$

Умения и навыки использования теоремы формируются при решении задач. Приведём серию таких задач ниже.

**Задача 1.** В треугольнике $ABC$ точка $D$ делит сторону $BC$ в отношении $BD:DC = 1:3$, а точка $O$ делит $AD$ в отношении $AO:OD = 5:2$. В каком отношении прямая $BO$ делит отрезок $AC$?

**Решение.**

*1 способ.*




Проведём $DM \| BE$.

По теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{AE}{EM} = \frac{AO}{OD} = \frac{5}{2}$.

Тогда $AE = 5k$, $EM = 2k$, где $k$ – коэффициент пропорциональности.

Аналогично $\frac{EM}{MC} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$, откуда $MC = 3EM = 6k$; $EC = 2k + 6k = 8k$; $\frac{AE}{EC} = \frac{5k}{8k} = \frac{5}{8}$.

**Ответ:** $AE:EC = 5:8$.

Для решения этой задачи пришлось выполнить дополнительное построение. Вряд ли учащиеся смогут догадаться, какое именно дополнительное построение требуется для решения этой или похожей задачи, поэтому она может оказаться сложной для них.

*2 способ.*

Рассмотрим $\Delta ADC$.

$B \in DC, O \in AD, E \in AC$; $O, B, E$ лежат на одной прямой. По теореме Менелая имеем: $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DO}{OA} = 1$.

Т.к. $BD:DC = 1:3$, то $CB:BD = 4:1$.

Подставляем и получаем: $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} = 1$, $\frac{AE}{EC} = \frac{5}{8}$.

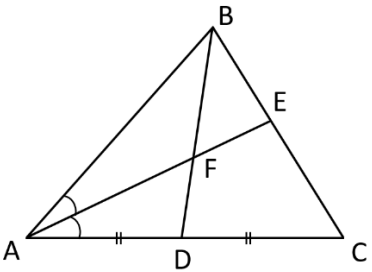
**Ответ:** $AE:EC = 5:8$.

Таким образом, сопоставление разных способов

решения может оказаться весьма полезным, становится очевидным преимущество второго способа.

**Задача 2 (на площадь).** Медиана $BD$ и биссектриса $AE$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $F$. Найти площадь $\Delta ABC$, если $AF = 3FE, BD = 4, AE = 6$.

**Решение.**




Пусть $FE = k$, тогда $AF = 3k$.

$AE = AF + FE$,

$AE = 3k + k = 4k$,

$4k = 6, k = \frac{3}{2}$.

$AF = \frac{9}{2}, FE = \frac{3}{2}$.

Рассмотрим $\Delta$AEC и секущую $BD$; $B \in EC, F \in AE, D \in AC$.

По теореме Менелая $\frac{AF}{FE} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$.

Следовательно, $\frac{3}{1} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим $\Delta DBC$ и секущую $AE$; $A \in DC$, $F \in BD, E \in BC, A, F, E \in AE$.

По теореме Менелая $\frac{DF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CA}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{DF}{FB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{DF}{FB} = 1 \Rightarrow DF = FB$.

В $\Delta$ABD $AF$ – биссектриса и медиана, следовательно, $\Delta ABD$ – равнобедренный и $AF \perp BD$.

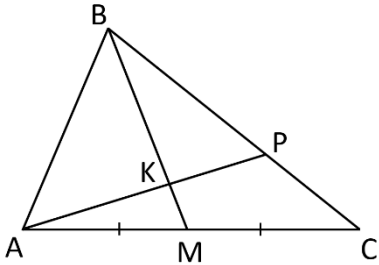
$$S_{ABD} = BD \cdot \frac{AF}{2} = 9; S_{ABC} = 2 \cdot S_{ABD} = 18.$$

**Ответ:** 18.

**Задача 3.** В треугольнике $ABC$ на его медиане $BM$ отмечена точка $K$ так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая $AK$ пересекает сторону $BC$ в точке $P$. Найдите отношение

площади треугольника $BKP$ к площади треугольника $ABK$.

**Решение.**




$\frac{S_{ABK}}{S_{BKP}} = \frac{AK}{KP}$, так как эти треугольники имеют равную высоту, проведенную на $AP$. Рассмотрим $\Delta BCM$ и секущую $AP$, по теореме Менелая: $\frac{MK}{KB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CA}{AM} = 1$.

Тогда $\frac{1}{4} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{2}{1} = 1$.

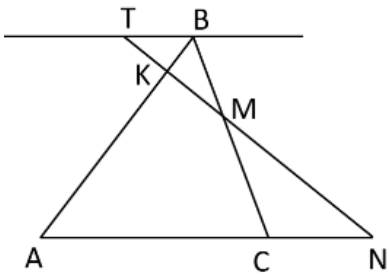
Следовательно, $\frac{BP}{PC} = \frac{2}{1}$.

Рассмотрим $\Delta APC$ и секущую $BM$, по теореме Менелая $\frac{AK}{KP} \cdot \frac{PB}{BC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$. Следовательно, $\frac{AK}{KP} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1$, тогда $\frac{AK}{KP} = \frac{3}{2}$. Значит, $\frac{S_{ABK}}{S_{BKP}} = \frac{3}{2}$.

**Ответ:** $\frac{3}{2}$.

**Задача 4.** Дан $\Delta ABC$. На продолжении стороны $AC$ за точку $C$ взята точка $N$, причём $AC = 2CN$. Точка $M$ находится на стороне $BC$, причём $BM{:}\,MC = 1{:}\,3$. В каком отношении прямая $MN$ делит сторону $AB$?

**Решение.**




Через точку $B$ проведём прямую, параллельную $AC$. Пусть прямая $MN$ пересекает её в точке T, а прямую $AB$ – в точке $K$. Обозначим $AC = a$. Тогда $CN = \frac{1}{2}a$, $AN = \frac{3}{2}a$. Из подобия треугольников $TBM$

и $NCM$ (коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$) находим, что $TB = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{6}a$, а из подобия треугольников $TBK$ и $NAK$ $\frac{BK}{AK} = \frac{TB}{AN} = \frac{\frac{1}{6}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{9}$.

Данную задачу можно легко решить с помощью теоремы Менелая.

Рассмотрим $\Delta ABC$ и секущую $KN$. По теореме Менелая $\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} = 1$.

$NC = \frac{1}{2}a$, $AN = \frac{3}{2}a$ (находили выше).

$MB = y$, $CM = 3y$ (из условия).

Тогда $\frac{BK}{KA} \cdot \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{1}{2}a} \cdot \frac{3y}{y} = 1$, откуда $\frac{BK}{KA} = \frac{1}{9}$.

**Ответ:** $\frac{1}{9}$.

Таким образом, анализируя применение теоремы Менелая для решения геометрических задач можно сделать вывод, что данная теорема позволяет облегчить решение задач, позволяет заменить некоторые «многоходовки» и дополнительные построения. Это очень ценно особенно в режиме ограниченного времени на ГИА.

*Задачи для самостоятельного решения* [2]

Задача 1. В треугольнике $ABC$ на стороне $BC$ взята точка $N$ так, что $NC = 3BN$; на продолжении стороны $AC$ за точку $A$ взята точка $M$ так, что $MA = AC$. Прямая $MN$ пересекает сторону $AB$ в точке $F$. Найдите отношение $BF$ к $FA$.

Ответ: 2 : 3.

Задача 2. В $\Delta ABC$ точка $M$ – середина стороны $AC$, точка $P$ лежит на стороне $BC$. Отрезок $AP$ пересекает $BM$ в точке $O$. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM{:}PC$.

Ответ: 1 : 2.

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка $E$ – середина ребра $AC$, точка $P$ – середина ребра $SB$.

а) Докажите, что прямая $PE$ делит высоту $SH$ пирамиды в отношении 1 : 3.

Задача 4. В $\Delta ABC$ на стороне $AC$ взята точка $M$, а на стороне $BC$ – точка $K$ так, что $AM{:}MC = 2{:}3, BK{:}KC = 4{:}3$. В каком отношении $AK$ делит отрезок $BM$?

Ответ: 10 : 3.

Задача 5. В $\Delta ABC$ $AA_1$ – биссектриса, $BB_1$ – медиана, $AB = 2, AC = 3$. Найдите $BO{:}OB_1$.

Ответ: 2 : 1.

*Литература*

1. Коваль, М.О. Доказательство теоремы Менелая / М.О. Коваль. – URL: http://surl.li/kwimmi (дата обращения: 20.05.2024).

2. Тюнева, Н.В. Методическая разработка по теме «Теоремы Чевы и Менелая» / Н.В. Тюнева. – URL: http://surl.li/qnwhcz (дата обращения: 20.05.2024).

# Решение стереометрических задач первой части КИМ ЕГЭ-профиль и ЕГЭ-база

*Дергачева Светлана Владимировна*
*учитель математики*
*МБОУ «Гимназия №79»*
*г. Барнаул*
*dergachova_1975@mail.ru*

Решение математических задач занимает центральное место в процессе обучения уже много лет. Однако только в прошлом веке стали изучать влияние личностных характеристик ученика на его способность решать задачи. Стереометрические задачи часто кажутся более сложными учащимся, чем задачи из других разделов математики. Методисты и учителя активно ищут способы улучшить процесс обучения геометрии. Результаты государственной итоговой аттестации показывают необходимость улучшения методов преподавания геометрии. Решение задач играет ключевую роль в обучении математике, особенно в геометрии, поэтому задачи рассматриваются как важное средство организации учебной деятельности на всех этапах обучения математике. Несмотря на изобилие задач по геометрии, многие учащиеся к окончанию школы не умеют их решать.

При анализе результатов Единого государственного экзамена в 11 классе экспертами отмечается, что даже для наиболее подготовленных учащихся испытывают трудности при решении геометрических задач.

При решении ряда геометрических задач можно

увидеть закономерность, которую в дальнейшем удобно использовать в схожих условиях. Предлагаем рассмотреть несколько таких задач на нахождение площади поверхности многогранников.

**Задача 1.** Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 4 и 18, а второго – 2 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

**Решение.**

Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле: $S = 2\pi rh$.

Найдём площадь боковой поверхности первого цилиндра:

$$S_1 = 2\pi r_1 h_1$$
$$S_1 = 2 \cdot 4 \cdot 18\pi = 144\,\pi.$$

Найдём площадь боковой поверхности второго цилиндра:

$$S_2 = 2\pi r_2 h_2$$
$$S_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3\pi = 12\,\pi.$$

Найдём отношение площади боковой поверхности цилиндра первого цилиндра к площади боковой поверхности второго: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{144\,\pi}{12\,\pi} = 12$.

**Ответ**: 12.

Решая данную задачу, можно заметить, что радиус основания второго цилиндра в два раза меньше радиуса основания первого ($r_1 : r_2 = 4 : 2 = 2$), а высота второго в шесть раз меньше высоты первого ($h_1 : h_2 = 18 : 3 = 6$). Следовательно, площадь поверхности второго в 12 раз меньше площади поверхности первого ($2 \cdot 6 = 12$).

**Задача 2.** Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого равны соответственно 6 и 14, а второго – 7 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

**Решение.**

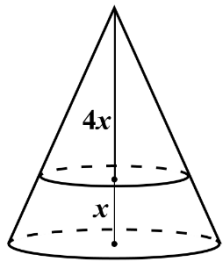
Найдём отношение радиусов оснований цилиндров $r_1 : r_2 = 6 : 7 = \frac{6}{7}$ и отношение высот этих цилиндров $h_1 : h_2 = 14 : 3 = \frac{14}{3}$.

Перемножим эти отношения: $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{3} = 4$.

**Ответ**: 4.

**Задача 3.** Площадь полной поверхности конуса равна 32,5. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 4 : 1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

**Решение.**




Исходный и отсеченный конус подобны, так как один из них является частью другого. Высота маленького конуса равна $4x$, а высота большого конуса равна $x + 4x = 5x$.

Коэффициент подобия конусов:

$k = \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$.

Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому площадь полной поверхности отсеченного конуса составляет $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ площади поверхности исходного. Тем самым, она равна:

$$32{,}5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{325 \cdot 16}{10 \cdot 25} = \frac{13 \cdot 16}{10} = \frac{208}{10} = 20{,}8.$$

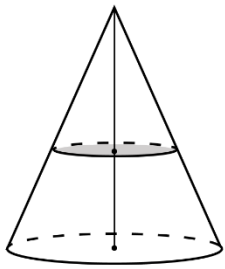
**Ответ**: 20,8.

Можно использовать следующее *правило*: Если все линейные размеры фигуры увеличить (уменьшить) в $k$ раз, то площадь увеличится (уменьшится) в $k^2$ раз. Если все размеры объёмного тела увеличить (уменьшить) в $k$ раз, то площадь его поверхности увеличится (уменьшится) в $k^2$ раз, а объём – в $k^3$ раз.

**Задача 4.** Площадь полной поверхности конуса равна 172. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1 : 1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.

**Решение**.

Коэффициент подобия конусов: $k = \frac{1}{2}$ (Обоснуйте!).



Площадь полной поверхности отсеченного конуса составляет $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ площади поверхности исходного. Тем самым, она равна:

$$172 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{172}{4} = 43.$$

**Ответ**: 43.

**Задача 5.** Даны два шара. Радиус первого шара в 14 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?

**Решение.**

Площадь поверхности шара выражается через его радиус формулой $S = 4\pi r^2$, поэтому при увеличении радиуса в 14 раз, площадь увеличится в $14^2 = 196$ раз.
Ответ: 196.

**Задача 6.**
Даны два шара с радиусами 14 и 2. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности другого?

**Решение.**

Площади поверхности шаров относятся как квадрат отношения их радиусов. Радиус большего шара в 7 раз больше радиуса меньшего, поэтому их площади относятся как $7^2 = 49$.

**Ответ**: 49.

Ниже предложены задачи на нахождение объёма.

**Задача 7.** Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

**Решение.**

Объем шара радиуса $r$ равен $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. При увеличении радиуса втрое, объем шара увеличится в $3^3 = 27$ раз.

**Ответ**: 27.

**Задача 8.** Даны две кружки цилиндрической формы. Первая кружка вдвое выше второй, а вторая в четыре раза шире первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?

**Решение.**

Объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 h$.

Объём первой кружки равен $V_1 = \pi r_1^2 h_1$, объём второй кружки равен $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \pi (4r_1)^2 \frac{h_1}{2} = 8\pi r_1^2 h_1 = 8V_1$. Значит, объём второй кружки в восемь раз больше объёма первой.

**Ответ**: 8.

**Задача 9**. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

**Решение.**

Обозначим радиус и высоту первой кружки $R_1$ и $H_1$ а второй кружки за $R_2$ и $H_2$. Первая кружка в два раза выше второй, тогда $H_1 = 2H_2$. Вторая кружка в полтора раза шире первой, тогда $R_2 = \frac{3}{2}R_1 \Leftrightarrow R_1 = \frac{2}{3}R_2$.

Следовательно, объем первой кружки равен:

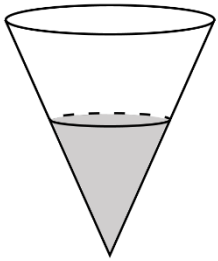
$$V_1 = \pi R_1^2 H_1 = \pi \left(\frac{2}{3}R_2\right)^2 2H_2 = \frac{8}{9}V_2.$$

Значит, отношение объема второй кружки к объему первой: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

**Ответ:** 1,125.

**Задача 10.** В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 14 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

**Решение.**



Меньший конус подобен большему с коэффициентом $\frac{1}{3}$.

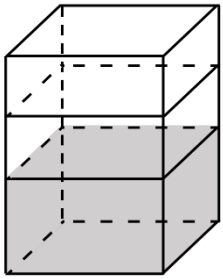
Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому объем большего конуса в $3^3 = 27$ раз больше объема меньшего конуса, он равен $14 \cdot 27 = 378$ (мл).

Значит, необходимо долить $378 - 14 = 364$ (мл) жидкости.

**Ответ**: 364 мл.

**Задача 11.** В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания, равной 50 см, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 5 см. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

**Решение.**



Объем вытесненной жидкости равен объему детали (закон Архимеда). Пусть уровень жидкости до погружения детали был $h$ см. Уровень жидкости поднялся на 5 см и стал $(h + 5)$ см, сторона основания $a = 50$ см, значит, вытесненный объем будет равен:

$V_{\text{дет}} = V_2 - V_1 = a^2(h + 5) - a^2h = a^2h + 5a^2 - a^2h = 5a^2$

$V_{\text{дет}} = 5 \cdot 50 \cdot 50 = 12\,500$ (см$^3$)

Найденный объём является объёмом детали.

**Ответ**: 12 500 см$^3$.

**Задача 12.**

В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания, равной 15 см, налита жидкость на уровне 1 м. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке увеличился в 1,4 раза. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

**Решение.**

Объем детали равен объему вытесненной ею жидкости.

Пусть уровень жидкости до погружения детали был $h$ см. После погружения детали в бак уровень жидкости поднялся, увеличившись в 1,4 раза, и стал $1{,}4\cdot h$ см. Сторона основания $a$ см, значит, вытесненный объем будет равен: $V_{\text{дет.}} = V_2 - V_1 = a^2 \cdot 1{,}4h - a^2 \cdot h = a^2 \cdot h(1{,}4 - 1) = 0{,}4a^2h.$

По условию задачи высота выражена в метрах, поэтому сначала её выразим в сантиметрах: 1 м =100 см. Т.е. $h = 100$ см, а сторона основания $a$ = 15 см.

$V_{\text{дет.}} = 0{,}4 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 100 = 9\,000$ (см $^3$).

**Ответ**: 9 000 см $^3$.

*Литература*

1. Открытый банк заданий ЕГЭ. ФГБНУ «ФИПИ». – URL: https://fipi.ru/ (дата обращения: 18.05.2024).

2. Малкова А.Г. Математика : авторский курс подготовки к ЕГЭ. – Изд. 5-е. – Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 540 с. – (Авторский курс).

3. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Сдам ГИА: Решу ЕГЭ». – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 18.05.2024).

4. Распечатай и реши: Математика ЕГЭ 2024. – URL: https://www.time4math.ru/ (дата обращения: 18.05.2024).
5. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Коновалов Е.А. ЕГЭ. Математика. Базовый уровень: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2024. – 192 с. – (ЕГЭ. ФИПИ – школе).
6. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Коновалов Е.А. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под редакцией И.В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2024. – 256 с. – (ЕГЭ. ФИПИ – школе).

# РАЗДЕЛ 3. Формирование функциональной математической грамотности

## Практико-ориентированные задачи как средство формирования функциональной грамотности

*Поползин Кирилл Евгеньевич*
*учитель математики*
*МБОУ «Гимназия №123»*
*г. Барнаул*
*popolzin-kirill22@mail.ru*

*«Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.»*
*А.Н. Крылов, русский и советский математик, механик и кораблестроитель*

Слова приведенного к статье эпиграфа находят свое отражение в современных федеральных государственных образовательных стандартах, где одним из основных требований к усвоению знаний учащихся является умение применять полученные знания в реальных жизненных ситуациях.

На уроках математики учителям часто приходится слышать вопросы учеников «А где нам это пригодится в жизни?», «Зачем это нужно знать?» и т.п. В начальной школе, когда дети учатся считать, или в 5 классе при изучении

дробей или процентов значимость математики можно продемонстрировать на множестве бытовых примеров. В более старших классах учителя математики сталкиваются с проблемой, когда в современных учебниках задачи часто оторваны от жизни и учащимся не совсем понятно, где они могут применить, полученные знания, кроме, как на уроках.

В связи с этим родилась идея создать линейку текстовых задач, максимально приближенных к реальной жизни, которые можно использовать при изучении разных тем в разные годы обучения. Задачи данного типа позволяют учащимся не только закрепить, полученные теоретические сведения по той или иной теме, но и почерпнуть полезную информацию из других областей знания (нематематических), а также сохранить/повысить мотивацию к изучению предмета.

В данной статье представлены авторские задачи для 7-9 классов, которые актуальны на уроках по решению текстовых задач.

**7 класс, тема «Система двух линейных уравнений»**

Рассмотрим несколько дней из жизни семьи, которая состоит из четырех человек: мамы, папы и двух детей, старшей дочери Марины и ее брата Сергея.

**Задача №1.** В выходные семья собралась поехать на дачу на автомобиле. От дома до дачи можно доехать двумя маршрутами. В первом случае необходимо сначала ехать по шоссе, на котором ограничение по скорости 90 км/ч, а потом по проселочной дороге, тогда весь маршрут составит 60 км. Во втором случае дорога немного длиннее и составляет 75 км, но проходит только по шоссе.

В связи с тем, что вторая дорога была открыта только

несколько дней назад, ранее семья пользовалась только первым маршрутом. Обычно они едут 20 минут по шоссе и 40 минут по проселочной дороге. Скорость автомобиля по шоссе на 30 км/ч больше, чем скорость по проселочной дороге. Какой необходимо выбрать маршрут, чтобы добраться до дачи быстрее?

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ км/ч – скорость по шоссе, а $y$ км/ч – скорость по проселочной дороге. Тогда $\frac{1}{3}x$ км семья проехала по шоссе и $\frac{2}{3}y$ км проехала по проселочной дороге. Зная, что первый маршрут – 60 км, составим 1-е уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 60.$$

Т.к. скорость по шоссе на 30 км/ч больше скорости по проселочной дороге, то 2-е уравнение примет вид:

$$x - y = 30.$$

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 60 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 60 \\ x - y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 + y \\ \frac{1}{3}(30 + y) + \frac{2}{3}y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 + y \\ 10 + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 + y \\ y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 50 \end{cases}$$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

80 км/ч – скорость автомобиля по шоссе.

Теперь найдем время движения по второму маршруту:

$75:80 = \frac{75}{80} = \frac{15}{16}$ (ч). Осталось сравнить время движения по первому и второму маршруту: $\frac{15}{16} < 1$, значит, поездка по второму маршруту пройдёт быстрее.

**Ответ:** 2-й маршрут.

**Задача №2.** Папе с сыном необходимо вскопать 9 грядок на дачном участке. Папа вскопал одну грядку за 20 минут, и вместе с сыном они вскопали еще одну грядку за 12 минут. После этого папа вынужден был уехать, так как его вызвали срочно на работу. В связи этим семье придется возвращаться домой на электричке, которая идет через 3 часа. Успеет ли сын вскопать оставшиеся грядки до электрички?

**Решение.**

Для решения данной задачи предварительно необходимо вспомнить, что такое производительность.

Производительность ($P$) – объём работы, выполняемый за единицу времени. В нашей задаче примем за 1 одну вскопанную грядку, тогда производительность – это часть грядки, вскопанная за 1 минуту.

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ – производительность папы, а $y$ – это производительность сына.

Зная, что папа в одиночку вскопал одну грядку за 20 минут, составим 1-е уравнение: $20x = 1$.

Зная, что папа и сын вместе вскопали грядку за 12 минут, составим 2-е уравнение: $12(x + y) = 1$.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 20x = 1 \\ 12(x + y) = 1 \end{cases}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Решим систему:

$$\begin{cases} 20x = 1 \\ 12(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{20} \\ 12(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{20} \\ 12\left(\frac{1}{20} + y\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{20} \\ 12(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{20} \\ y = \frac{1}{30} \end{cases}$$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

$\frac{1}{30}$ – это производительность сына (часть грядки за 1 минуту). Значит, он вскопает 1 грядку за 30 минут.

Всего ему осталось вскопать 7 грядок. Найдём время, которое для этого потребуется Сергею: $30 \cdot 7 = 210$ минут.

210 минут $=$ 3,5 часа. Сравним, полученное время, со временем до отправления электрички.

$3{,}5 > 3$, значит можно сделать вывод, что не успеет.

**Ответ:** не успеет.

**Задача №3.** В то время, пока папа и сын заняты работой на участке, соседи предложили маме приобрести клубнику и малину. В связи с этим мама с дочерью решили сварить варенье на зиму, но у них оказалось только 10 кг сахара. Сколько килограмм нужно приобрести ягоды каждого вида чтобы хватило имеющегося сахара, если на варенье из малины на 1 кг ягоды требуется 1,2 кг сахара, а на варенье из клубники на 1 кг ягоды требуется 0,8 кг сахара? Кроме этого следует учитывать, что в семье варенье из клубники едят в два раза чаще, чем из малины. Ответ округлите до целых.

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ кг – купили малины, а $y$ кг – купили клубники.

Тогда для варенья из малины необходимо $1{,}2x$ кг сахара, а для варенья из клубники $0{,}8y$ кг сахара.

Из малины получится варенья $(x + 1{,}2x)$ кг, а из клубники $(y + 0{,}8y)$ кг.

Зная, что семье необходимо варенья из клубники в два раза больше, чем из малины, составим 1-е уравнение:

$$y + 0{,}8y = 2(x + 1{,}2x).$$

Зная, что всего сахара 10 кг, составим 2-е уравнение:

$$0{,}8y + 1{,}2x = 10.$$

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} y + 0{,}8y = 2(x + 1{,}2x) \\ 0{,}8y + 1{,}2x = 10 \end{cases}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Решаем систему:

$$\begin{cases} y + 0{,}8y = 2(x + 1{,}2x) \\ 0{,}8y + 1{,}2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}8y = 4{,}4x \\ 0{,}8y + 1{,}2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{9}x \\ 0{,}8y + 1{,}2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{9}x \\ 0{,}8 \cdot \frac{22}{9}x + 1{,}2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{9}x \\ \frac{88}{45}x + \frac{12}{10}x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{9}x \\ \frac{142}{45}x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{22}{9}x \\ x \approx 3{,}16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \approx 7{,}72 \\ x \approx 3{,}16 \end{cases}$$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

3,16 кг – нужно купить малины;

7,72 кг – нужно купить клубники;

Но в задаче сказано, что ответ нужно округлить до целых, поэтому $3{,}16 \approx 3$, а $7{,}72 \approx 8$, но здесь следует учитывать, что если мы округлим 7,72 по правилам математики в большую сторону до 8, то сахара не хватит, значит, округлять нужно в меньшую сторону.

**Ответ:** 3 кг малины и 7 кг клубники.

**8 класс, тема «Дробно-рациональные уравнения»**

В прошлом году, уже знакомая нам семья, состоящая из четырех человек, лето провела на даче, а в этом году они решили съездить в отпуск на море… И вот, что из этого вышло:

**Задача №1.** Для поездки в отпуск семье не хватает 100 000 рублей, поэтому было принято решение взять кредит в банке. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем заемщик переводит очередной платеж (один раз в год).

Семья планирует выплатить кредит за два платежа. Сможет ли семья вовремя погасить кредит, если ежемесячно они могут откладывать по 5 000 рублей, а процентная ставка в банке – 13,9 %?

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ – процент, под который банк выдал кредит. Из условия следует, что на 31 декабря долг был $100(1 + 0{,}01x)$ тыс. р.

Ежемесячно семья откладывает на кредит 5 тыс. рублей, поэтому первый платёж, который они сделают в конце года, составит 60 тыс. рублей. На оставшуюся сумму

был начислен процент, и перед вторым платежом долг составлял $(100(1+0{,}01x)-60)(1+0{,}01x)$ тыс. рублей.

Зная, что этот долг был погашен также платежом в 60 тыс. р., составим и решим уравнение:

$$(100(1+0{,}01x)-60)(1+0{,}01x)=60$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Решим уравнение:

$$(100(1+0{,}01x)-60)(1+0{,}01x)=60$$

$$(100+x-60)(1+0{,}01x)=60$$

$$(40+x)(1+0{,}01x)=60$$

$$40+0{,}4x+x+0{,}01x^2=60$$

$$0{,}01x^2+1{,}4x-20=0$$

Полученное квадратное уравнение, решим по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_{1,2}=\frac{-1{,}4\pm\sqrt{1{,}96-4\cdot0{,}01\cdot(-20)}}{2\cdot0{,}01}$$

$$x_1=\frac{-1{,}4+\sqrt{2{,}76}}{0{,}02}$$

$$x_2=\frac{-1{,}4-\sqrt{2{,}76}}{0{,}02}$$

$$\sqrt{2{,}89}<\sqrt{2{,}76}<\sqrt{2{,}56}$$

$$\sqrt{2{,}76}\approx1{,}65$$

$$x_1\approx12{,}5$$

$$x_2\approx-152{,}5$$

Второй корень уравнения не удовлетворяет условию задачи, т.к. процентная ставка не может быть отрицательной.

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

Сравним, найденный процент, с процентной ставкой банка: $12{,}5<13{,}9$, поэтому, со ставкой кредита 13,9% и ежегодным платежом в 60 тыс. рублей кредит вовремя выплатить нельзя.

**Ответ:** Не сможет.

**Задача №2.** Для поездки в аэропорт семья заказала такси на 8.00 чтобы успеть на регистрацию рейса вовремя. Однако такси приехало в 08.15. Чтобы наверстать потерянное время, такси должно увеличить свою стандартную скорость на 20 км/ч.

Сможет ли семья добраться до аэропорта вовремя, если весь путь составляет 30 км, а ограничения по скорости на дороге – 60 км/ч?

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ км/ч – плановая скорость такси, тогда $(x+20)$ км/ч – новая скорость такси. Если весь путь составил 30 км, то $\frac{30}{x}$ ч – плановое время движения от дома до аэропорта, а $\frac{30}{x+20}$ ч – реальное время движения.

Зная, что реальное время движения такси меньше планового на 15 мин $=\frac{1}{4}$ ч, составим и решим уравнение:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+20}=\frac{1}{4}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Приведём, полученное уравнение, к общему знаменателю:

$$\frac{120(x+20)-120x-x(x+20)}{4x(x+20)}=0$$

Раскроем скобки и приведём подобные:

$$\frac{-x^2-20x+2400}{4x(x+20)}=0$$

$$\begin{cases}-x^2-20x+2400=0\\4x(x+20)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=40, x_2=-60\\x\neq 0,\\x\neq -20\end{cases}$$

$$x_1=40,\quad x_2=-60$$

Второй корень уравнения не удовлетворяет условиям

задачи, т.к. скорость не может быть отрицательной.

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

Таким образом, мы нашли плановую скорость такси – 40 км/ч, значит, реальная скорость стала – 60 км/ч. Однако, здесь нужно обратить внимание на ограничения скорости движения по трассе 60 км/ч.

Сравнивая реальную скорость такси с ограничением движения, можно сделать вывод, что такси может двигаться с данной скоростью.

**Ответ:** семья успеет в аэропорт вовремя.

**Задача №3.** В предпоследний день своего отпуска семья запланировала посетить экскурсию на водопады. Когда они обратились к туроператору, то узнали, что на нужный день свободных мест уже нет, однако есть места на экскурсию, которая уезжает через час. Но для того, чтобы попасть на данную экскурсию необходимо обратиться к экскурсоводу на месте отправления, чтобы он посадил их на свободные места.

Всего на данную экскурсию было запланировано 80 туристов и было заказано несколько автобусов. Однако по техническим причинам один автобус не прибыл. Поэтому теперь необходимо в каждом автобусе разместить на 8 человек больше, чем предполагалось.

Сможет ли семья поехать на данную экскурсию, если вместимость каждого автобуса 27 человек?

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ – количество человек предполагалось разместить в каждом автобусе, тогда $\frac{80}{x}$ автобусов было

заказано изначально. Зная, что один автобус не прибыл, количество человек в автобусе стало больше на 8 человек, составим и решим уравнение:

$$\frac{80}{x} - \frac{80}{x+8} = 1$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

Приведём, полученное уравнение, к общему знаменателю:

$$\frac{80(x+8) - 84x - x(x+8)}{x(x+8)} = 0$$

Раскроем скобки и приведем подобные:

$$\frac{-x^2 - 12x + 640}{x(x+8)} = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 - 12x + 640 = 0 \\ x(x+8) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 20, x_2 = -32 \\ x \neq 0, \quad x \neq -8 \end{cases}$$

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = -32$$

Второй корень уравнения не удовлетворяет условиям задачи, т.к. количество человек не может быть отрицательным.

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

Таким образом, мы выяснили, что изначально планировалось разместить по 20 человек в автобусе, а в новых условиях по 28 человек. Учитывая, что вместимость одного автобуса – 27 человек, можно сделать вывод, что членам нашей семьи мест не хватит.

**Ответ:** Не сможет.

***9 класс «Неравенства»***

Жизнь у всех у нас продолжается и, как ни удивительно, взрослеют дети. Так произошло и в нашей семье. Марина и Сергей, ранее проживающие в одной комнате, в силу вхождения в подростковый возраст больше в

одной комнате проживать не могут. Поэтому встал вопрос о расширении жилплощади. И вот, что из этого вышло.

**Задача №1.** Перед покупкой новой квартиры родители посчитали, что их среднемесячный доход должен быть не меньше 120 тыс. рублей.

У главы семейства есть свой микро-бизнес по установке решеток, предназначенных защитить маленьких детей от выпадения из окон.

Знакомые аналитики папы просчитали, что объем спроса единиц в месяц на его продукцию ($V$) зависит от цены ($C$) и вычисляется по формуле $V = 32 - C$. Стоимость решетки зависит от ее размера, в связи с этим, встал вопрос – какую наименьшую цену определить за одну решетку, чтобы доход от бизнеса был не менее 120 тыс. рублей в месяц. Конечно, здесь необходимо учитывать, что расход на материалы составляет 30% от общей выручки.

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ тыс. р. – цена за 1 решетку, тогда $(32 - x)$ штук – ежемесячный спрос на товар, а $x(32 - x)$ – ежемесячная выручка.

Зная, что в месяц выручка должна быть не меньше $(120 + 120 \cdot 0{,}3)$ тыс. р. составим и решим неравенство:

$$x(32 - x) \geq 120 + 120 \cdot 0{,}3$$

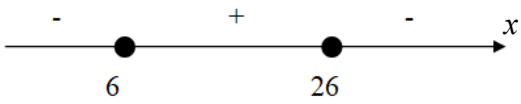
*II этап. Работа с составленной моделью*

$$32x - x^2 \geq 156$$

$$-x^2 + 32x - 156 \geq 0$$

$$-x^2 + 32x - 156 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = 26$$




$x \in [6; 26]$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

По условиям задачи необходимо найти наименьшую цену за 1 решетку. Из полученного множества решений число 6 – наименьшее.

**Ответ:** 6 тыс. р.

В дальнейшем наша семья вышла на необходимый доход, нашла себе подходящую квартиру, и наконец, вышла на сделку купли-продажи. Но, к сожалению, в нашей жизни довольно часто случаются мелкие неприятности. Вот и в нашей семье перед самой сделкой случились непредвиденные обстоятельства – договор дарения на нынешнюю квартиру оказался у бабушки, которая в данный момент проживает в г. Змеиногорске.

**Задача №2.** Чтобы забрать необходимый документ, папа выехал на машине из г. Барнаула в 7:00, в г. Змеиногорске ему необходимо быть не ранее 10:00, т.к. до этого времени бабушка находится на приеме у врача. Однако на обратном пути трассу перекрыли, в связи с движением военной колонны, поэтому главе семейства пришлось обратно ехать через г. Рубцовск. Успеет ли папа привести документы на сделку к 15.00, если расстояние от г. Барнаула до г. Змеиногорска 336 км, а от г. Змеиногорска до г. Барнаула через г. Рубцовск 389 км, если ограничения скорости по трассе – 90 км/ч?

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ км/ч – скорость автомобиля. Зная, что время поездки до г. Змеиногорска должно быть не меньше 3 часов (т.к. раньше 10:00 бабушки не будет дома), а расстояние между городами составляет 336 км, составим первое неравенство: $3x \leq 336$.

Т.к. обратная дорога составит 389 км, то всего папе необходимо преодолеть 725 км.

Зная, что папа выехал в 7:00 и вернуться должен не позднее 15:00 составим второе неравенство: $8x \geq 725$.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} 3x \leq 336 \\ 8x \geq 725 \end{cases}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

$$\begin{cases} 3x \leq 336 \\ 8x \geq 725 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 112 \\ x \geq 90{,}625 \end{cases}$$

$$x \in [90{,}625; 112]$$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

Согласно условиям задачи, не нарушая правил дорожного движения, автомобиль папы может двигаться со скоростью не более 90 км/ч, а эти значения не входят в решение математической модели задачи. Но здесь следует учитывать, что максимальная норма превышения скорости без штрафа – 20 км/ч. Поэтому по трассе можно двигаться со скоростью до 110 км/ч.

**Ответ:** Папа успеет.

Сделка состоялась, семья смогла продать старую и купить новую квартиру. Ну, а после покупки новой квартиры обычно следует переезд и ремонт!

**Задача №3.** В новой квартире нашей семье нравилось все, кроме напольного покрытия в кухне, поэтому они решили сделать современный дизайн и постелить ламинат и плитку.

В данный момент наши домочадцы располагают суммой в 20 000 рублей. Хватит ли данных денег, если площадь кухни 12 м$^2$, стоимость ламината 1 100 р/м$^2$, плитки на 200 р. меньше, стоимость работы по укладке плитки и ламината составляет 6 000 р., а соотношение площади плитки к площади ламината должно быть не более чем 1 к 3.

**Решение.**

*I этап. Составление математической модели*

Пусть $x$ м$^2$ плитки необходимо купить, тогда ламината необходимо $(12 - x)$ м$^2$.

Зная, что соотношение плитки к ламинату не более чем 1 к 3, составим первое неравенство: $\frac{x}{12-x} \leq \frac{1}{3}$

Зная цену плитки и ламината за 1 м$^2$ и то, что сумма покупки всего напольного покрытия не должна превышать 14 тыс. рублей, составим второе неравенство:

$$x \cdot 1\,100 + (12 - x) \cdot 900 \leq 14\,000.$$

Математическая модель задачи примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{12 - x} \leq \dfrac{1}{3} \\ x \cdot 11\,00 + (12 - x) \cdot 900 \leq 14\,000 \end{cases}$$

*II этап. Работа с составленной моделью*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{12 - x} \leq \dfrac{1}{3} \\ x \cdot 11\,00 + (12 - x) \cdot 900 \leq 14\,000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \text{ или } x > 12 \\ x \leq 16 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; 3] \cup (12; 16].$$

*III этап. Ответ на вопрос задачи*

Учитывая то, что вся площадь кухни 12 м$^2$, и то, что площадь не может быть отрицательной, мы можем взять любое значение из промежутка $(0; 3]$. Если есть решение данной системы, то можно сделать вывод – денег хватит.

**Ответ:** хватит.

В заключении, следует отметить, что иногда на своих уроках мы (педагоги) не учим видеть ситуацию в целом, и именно потому вся школьная программа математики для учащихся похожа на огромное количество формул, которые трудно запомнить. Однако, нужно уметь разбираться в проблеме и применять математику грамотно, чтобы на выходе получить правильное решение в реальной жизни.

Применение на уроках подобных текстовых задач помогают учащимся относиться к математике с большим интересом, увлечением и пониманием необходимости математических знаний, как для будущей их деятельности, так и для повседневной жизни.

# Методические рекомендации по решению практико-ориентированных задач №№ 1-5 и №14 ОГЭ по математике

*Попова Елена Геннадьевна*
*учитель математики*
*МБОУ «Советская СОШ»*
*с. Советское Павловского района*
*Popow_vladimir@mail.ru*

В решении типовых «сюжетных» заданий № 1-5 с общим рисунком из КИМ ОГЭ 9 класса используются межпредметные связи. Эти задания развивают вариативность, умение анализировать информацию, делать правильный выбор. Основными трудностями при работе с такими заданиями может являться материал прикладного характера и лимит времени урока. Поэтому важно формировать и развивать у обучающихся навык «смыслового чтения». Необходимо учить их выделять ключевые фразы и основные вопросы из текста, разбираться в изображениях рисунков, планов и масштабе фигур на рисунках, анализировать и пользоваться информацией из таблиц.

Из опыта работы можно обобщить ниже представленные методические рекомендации для решения заданий № 1-5 с общим рисунком.

При разборе заданий «о дачном участке или квартире» необходимо уточнить понятие ближайших точек объектов, обратить внимание, что размеры клетки и плитки могут не совпадать. Следует уделить особое внимание тому, сколько единиц измерения составляет 1 клетка. Необходимо

подписывать объекты на плане. Важно правильно записать ответ в виде целого числа, десятичной дроби без указания единиц измерения.

При разборе заданий «о теплицах» важно вспомнить понятие дуги окружности, радиуса, диаметра, длины окружности, а также обратить внимание на то, что количество частей при разрезании отрезка на единицу меньше, чем количество граничных точек. Необходимо правильно округлять результат вычислений, учитывая, что округление ответа идет до десятых, сотых. Оценка иррациональных чисел требует повышенного внимания.

При разборе заданий «о маркировке шин» следует уточнить понятия радиуса, диаметра, процента, пропорции. Формула общего диаметра колеса в тексте не дана, но её без труда можно найти из рисунка: $D = d + 2H$. В маркировке шины второе число равно $\frac{H}{B} \cdot 100\%$, что дает возможность выразить $H$. Далее практически все задания решаются с использованием этих двух формул. Необходимо правильно округлять результат, записывать требуемые единицы измерения. В тексте задания есть информация о конструкции шины и индексе скорости. Этой информацией можно пренебречь.

При разборе заданий «о форматах листов бумаги» рекомендуется вспомнить понятия подобных фигур и пропорции, обратить внимание на следующий факт: чем меньше цифра в обозначении формата листа, тем больше размеры листа. Перед решением задачи целесообразно поработать с листом бумаги А4 (складывать, разрезать и сравнивать размеры). При решении этих задач учащиеся должны понимать, что количество листов N, полученных из

листа формата А0, вычисляется по формуле: $N = 2^n$, где $n$ – номер формата листа, который нужно получить из листа А0. Например: из листа формата А0 получится $2^6 = 64$ листа формата А6.

При решении задач «о форматах листов бумаги» можно столкнуться с противоречиями в полученных результатах, которые зависят от выбранного пути рассуждений. Поэтому необходимо правильно округлять результат, записывать ответ в требуемых единицах измерения.

Решая задания «о зонтике», учащиеся вспоминают понятия радиуса, диаметра окружности, сферы, сферического сегмента, площади треугольника, пропорциональности. Все данные на рисунке необходимо подписывать и обязательно следует обратить внимание на то, все ли единицы измерения одинаковые.

При решении задач «на движение» важно вспомнить формулы движения и отметить, что, если время представлено в часах и в виде дроби со знаменателем 60, то числитель – это количество минут. Например, $\frac{23}{60}$ ч = 23 мин.

В решении задач «о печках» применяется площадь прямоугольника и объем прямоугольного параллелепипеда, теорема Пифагора. Важно, чтобы учащиеся обращали внимание на то, что единицы измерения должны быть одинаковые. Баню можно представить, например, по подобию класса, в котором находятся дети.

При решении задач №1-5 следует обратить внимание учащихся на то, что часть данных, полученных при решении одних заданий, используется в других заданиях.

При разборе задач №14 «на прогрессию»

целесообразно вспомнить формулы арифметической и геометрической прогрессии. Эти задачи в известной мере несложные, некоторые из них решаются простыми вычислениями. Например:

**Задача.** В амфитеатре 15 рядов. В первом ряду 20 мест, а в каждом следующем – на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в десятом ряду амфитеатра?

**Решение:** 1 ряд: 20; 2 ряд: 22; 3 ряд: 24; 4 ряд: 26; 5 ряд: 28; 6 ряд: 30; 7 ряд: 32; 8 ряд: 34; 9 ряд: 36; 10 ряд: 38.

**Ответ**: 38.

Важно также научить учащихся пользоваться справочным материалом, который дается им на экзамене. Они должны знать, какие формулы там есть и как они применяются.

К.Ф. Гаусс писал: «Математика – наука для глаз, а не для ушей», поэтому основной педагогический прием при разборе «сюжетных» задач – визуализация. Важные педагогические принципы: тематический, временной, личностно-ориентированный и, главное, принцип тренировки.

**Что нужно уметь**

- Выделять ключевые фразы и основные вопросы из текста заданий.
- Выполнять арифметические действия с натуральными числами, десятичными и обыкновенными дробями, производить возведение числа в степень, извлекать арифметический квадратный корень из числа.
- Переводить единицы измерения.
- Округлять числа.

- Находить число от процента и проценты от числа.
- Находить часть от числа и число по его части.
- Применять основное свойство пропорции.
- Решать уравнения, неравенства.
- Разбираться в изображениях рисунков, планов и масштабе фигур на рисунках.
- Анализировать и пользоваться информацией из таблиц.
- Анализировать и пользоваться заданными графиками.

**Что нужно знать**

Формулы геометрии:

– Периметр прямоугольника: $P = 2(a + b)$, где $a$ и $b$ – стороны прямоугольника.
– Периметр квадрата: $P = 4a$, где $a$ – сторона квадрата.
– Длина окружности: $C = 2\pi R$, где $R$ – радиус окружности.
– Объем прямоугольного параллелепипеда: $V = abc$, где $a, b, c$ – длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда.
– Площади фигур:

• Площадь прямоугольника: $S = ab$, где $a$ и $b$ – стороны прямоугольника.

• Площадь квадрата: $S = a^2$, где $a$ – сторона квадрата.

• Площадь круга: $S = \pi R^2$, где $R$ – радиус окружности.

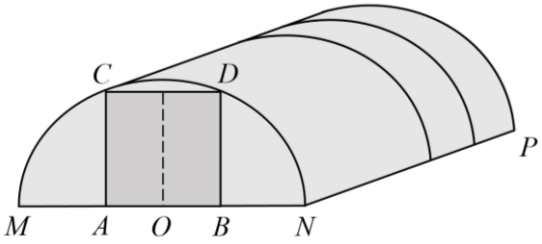
– Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$, где $a$ и $b$ – катеты прямоугольного треугольника, $c$ – гипотенуза.
– Формулы синуса, косинуса, тангенса острого угла в

прямоугольном треугольнике.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

**Теплица**

Алексей Юрьевич решил построить на дачном участке теплицу длиной $NP = 4{,}5$ м. Для этого он сделал прямоугольный фундамент. Для каркаса теплицы Алексей Юрьевич заказывает металлические дуги в форме полуокружностей длиной 5,2 м каждая и плёнку для обтяжки. В передней стенке планируется вход, показанный на рисунке прямоугольником $ACDB$. Точки $A$ и $B$ – середины отрезков $MO$ и $ON$ соответственно.




**№ 1.** Какое наименьшее количество дуг нужно заказать, чтобы расстояние между соседними дугами было не более 60 см?

**Решение.**

Обратим внимание, что длина теплицы в метрах, а расстояние между дугами в сантиметрах, поэтому переведем 60 см = 0,6 м. Найдем количество промежутков между дугами: $4{,}5 : 0{,}6 = 7{,}5$, следовательно, наименьшее количество промежутков – 8. Обратим внимание, что количество дуг на единицу больше, чем количество промежутков: $8 + 1 = 9$.

**Ответ**: 9.

**№ 2.** Найдите примерную ширину $MN$ теплицы в метрах. Число $\pi$ возьмите равным 3,14. Результат округлите до десятых.

**Решение.**

Ширина MN представляет собой диаметр окружности. Длина окружности равна $5{,}2 \cdot 2 = 10{,}4$ (м).

Зная формулу длины окружности $L = \pi \cdot D$, получим $D = L : \pi = 10{,}4 : 3{,}14 \approx 3{,}31$. Важно подчеркнуть, что раз ответ нужно округлить до десятых, то делить будем до сотых. Таким образом, $D = 3{,}3$ (м).

**Ответ**: 3,3.

**№ 3.** Найдите примерную площадь участка внутри теплицы в квадратных метрах. Ответ округлите до целых.

**Решение.**

Площадь участка представляет собой прямоугольник.

Вычислим площадь: $S = 4{,}5 \cdot 3{,}3 = 14{,}85$ м$^2$.

Округлим до целых: $S = 15$ м$^2$.

**Ответ**: 15.

**№ 4.** Сколько квадратных метров плёнки нужно купить для теплицы с учётом передней и задней стенок, включая дверь? Для крепежа плёнку нужно покупать с запасом 10%. Число $\pi$ возьмите равным 3,14. Ответ округлите до целых.

**Решение.**

Для начала необходимо посчитать площадь плёнки для обтяжки теплицы без передней и задней стенок. В этом случае искомая площадь плёнки представляет собой площадь прямоугольника со сторонами 4,5 м и 5,2 м. Вычислим его площадь: $S = 4{,}5 \cdot 5{,}2 = 23{,}4$ м$^2$.

Передняя и задняя стенка – это два полукруга, то есть вместе они составляют круг. Найдем площадь круга: $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{5{,}2}{3{,}14}\right)^2 \approx 8{,}61$. Заметим, что в данной формуле $l$ – это не длина окружности, а длина дуги теплицы, то есть половина дуги окружности и перед вычислениями нужно сократить 3,14. Получается, что пленки нужно купить $23{,}4 + 8{,}61 = 32{,}01$ м$^2$. Поскольку плёнки надо купить с запасом, прибавляем 10% к уже имеющемуся значению. Важно отметить, что 10% можно найти как $\frac{1}{10}$ от числа. Получаем: $32{,}01 + 3{,}2 = 35{,}21$ (м$^2$). Округляя до целых, получаем 35 м$^2$.

**Ответ**: 35.

**№ 5.** Найдите примерную высоту входа в теплицу в метрах. Число $\pi$ возьмите равным 3,14. Ответ округлите до десятых.

**Решение.**

*1 способ.*

Треугольник $COD$ – равносторонний. Высота треугольника $COD$ является высотой входа. Воспользуемся формулой высоты равностороннего треугольника $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, где $a$ – это сторона треугольника, равная $OD$ и $OC$, и радиусу полуокружности, который мы находили в №4, $a = \frac{5{,}2}{3{,}14} \approx 1{,}66$. Таким образом, найдем высоту: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1{,}66 \approx \frac{1{,}7 \cdot 1{,}66}{2} = 1{,}411 \approx 1{,}4$ (м).

**Ответ**: 1,4.

*2 способ.*

Рассмотрим треугольник $ACO$ прямоугольный, $AC$ –

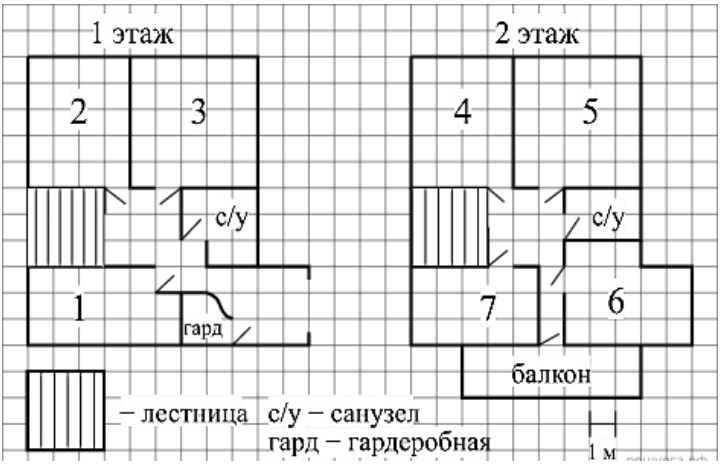
высота входа. $OC$ – радиус полуокружности который мы нашли в задаче №4: $OC = \frac{5,2}{3,14} \approx 1,66$ (м).

$OA = \frac{OC}{2} = \frac{1,66}{2} = 0,83$ (м). По теореме Пифагора $AC = \sqrt{1,66^2 - 0,83^2} = \sqrt{(1,66 - 0,83)(1,66 + 0,83)} =$
$= \sqrt{0,83 \cdot 2,49} = \sqrt{2,0667} \approx 1,4$(м).

**Ответ**: 1,4.

**План дома**

Сергей Васильевич – крупный учёный. На рисунке изображён план двухэтажного дома (сторона клетки соответствует 1 м), в котором он проживает с женой Валентиной Петровной и двумя детьми: Костей и Викой.




На первом этаже гостиная – самая большая по площади комната. Кухня имеет вытянутую форму, её длина в два раза больше ширины, она тоже находится на первом этаже. Рядом с гостиной расположена столовая. Комната Кости расположена на втором этаже над кухней, его комната — соседняя с комнатой сестры Вики. Комната родителей расположена над столовой, рядом с ней

просторный кабинет Сергея Васильевича.

**№ 1.** Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане.

Заполните таблицу, в ответ запишите последовательность четырёх цифр без пробелов и других дополнительных символов.

| **Объекты** | Гостиная | Комната Кости | Кабинет | Кухня |
|---|---|---|---|---|
| **Цифры** | 3 | 7 | 5 | 1 |

**Решение.**

Внимательно читаем условие и выделяем всё, что нам дано. Лучше и нагляднее всё помечать и подписывать на чертеже. На первом этаже гостиная – самая большая по площади комната. Значит, гостиная – 3. Кухня имеет вытянутую форму, её длина в два раза больше ширины, она тоже находится на первом этаже. Следовательно, кухня – 1, у нее длина 6 клеток, а ширина 3. Рядом с гостиной расположена столовая, поэтому столовая – 2. Комната Кости расположена на втором этаже над кухней. Значит, комната Кости – 7. Его комната – соседняя с комнатой сестры Вики, поэтому комната Вики – 6. Комната родителей расположена над столовой. Значит, комната родителей – 4. Рядом с ней просторный кабинет, значит, кабинет – 5. Теперь занесем полученные данные в таблицу.

**№ 2.** В каждом из пронумерованных помещений, кроме Костиной комнаты, два окна, а в Костиной комнате – всего одно. Других окон нет. Площадь стекла для каждого окна составляет 3 $м^2$. Стоимость окон при установке

складывалась из стоимости стекла (3 000 рублей за $м^2$ окна) и стоимости монтажа и фурнитуры (7 000 рублей за каждое окно). Определите общую стоимость всех окон и их установки. Ответ дайте в рублях.

**Решение.**

Найдем стоимость одного окна:

$$3 \cdot 3\,000 + 7\,000 = 16\,000\ (р.).$$

Посчитаем количество окон: 6 (количество комнат) · 2 (количество окон в комнате)+ 1 (окно в комнате Кости) = 13.

Посчитаем стоимость всех окон:

$$13 \cdot 16\,000 = 208\,000\ (р.)$$

**Ответ**: 208 000.

**№ 3.** Найдите площадь (в $м^2$) комнаты Вики.

**Решение.**

Решить задачу можно 2 способами.

*1 способ.*

Посчитать количество клеточек в комнате Вики (18) и, зная, что сторона клетки 1 м, т.е. площадь клетки 1 $м^2$ найти искомую площадь: $18 \cdot 1 = 18\ м^2$

*2 способ.*

Комната Вики состоит из 2 прямоугольников:

$$S_1 = 3 \cdot 5 = 15\ м^2, S_2 = 1 \cdot 3 = 3\ м^2.$$

Тогда площадь комнаты составит: $15 + 3 = 18\ м^2$.

**Ответ**: 18.

**№ 4.** На втором этаже расположен открытый балкон. На его бортике закреплены деревянные поручни. Определите их общую протяжённость в метрах.

**Решение.**

Посчитаем количество клеток, ограничивающих балкон – 11. Длина одной клетки 1 м, следовательно, общая протяженность балконов: $11 \cdot 1 = 11$ (м).

**Ответ**: 11.

**№ 5.** После постройки дома денег на внутреннюю отделку осталось меньше, чем планировалось первоначально, поэтому пришлось экономить. В гостиной и столовой предполагалось класть паркетную доску, но обошлись ламинатом, а на сэкономленные деньги приобрели туристические путёвки в Крым. Ламинат и паркетная доска продаются только в упаковках. Каждая упаковка содержит одинаковое количество $м^2$ материала. Сколько рублей в результате удалось сэкономить на путёвки?

| **Тип покрытия** | **Стоимость 1 $м^2$ материала (р.)** | **Стоимость укладки 1 $м^2$ материала (р.)** | **Количество материала в упаковке ($м^2$)** |
|---|---|---|---|
| Паркетная доска | 3200 | 1100 | 10 |
| Ламинат | 520 | 180 | 7 |

**Решение.**

Найдем площадь гостиной и столовой: $9 \cdot 5 = 45$ клеток, $45 \cdot 1 = 45$ $м^2$.

Найдем количество упаковок паркетной доски: $45 : 10 = 4{,}5$ округляем до 5. Значит, нужно купить 50 $м^2$ паркета.

Посчитаем стоимость укладки паркета:

$$50 \cdot 3200 + 45 \cdot 1\,100 = 160\,000 + 49\,500 = 209\,500\ (\text{р.})$$

Найдём количество упаковок ламината: $45 : 7 = 6{,}4$. Округляем до 7, значит, нужно купить 49 м$^2$ ламината.

Посчитаем стоимость укладки ламината:

$$49 \cdot 520 + 45 \cdot 180 = 25\,480 + 8\,100 = 33\,580\ (\text{р.})$$

Найдем экономию: $209\,500 - 33\,580 = 175\,920\ (\text{р.})$

**Ответ**: 175 920.

## Зонтик

Два друга Петя и Вася задумались о том, как рассчитать площадь поверхности зонта.

На первый взгляд зонт кажется круглым, а его купол напоминает часть сферы (сферический сегмент). Но если присмотреться, то видно, что купол зонта состоит из восьми отдельных клиньев, натянутых на каркас из восьми спиц (рис. 1). Сферическая форма в раскрытом состоянии достигается за счёт гибкости спиц и эластичности ткани, из которой изготовлен зонт.

Петя и Вася сумели измерить расстояние между концами соседних спиц $a$. Оно оказалось равно 38 см. Высота купола зонта $h$ (рис. 2) оказалась равна 25 см, а расстояние $d$ между концами спиц, образующих дугу окружности, проходящей через вершину зонта, ровно 100 см.

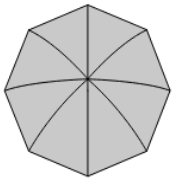
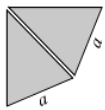


Рис. 1



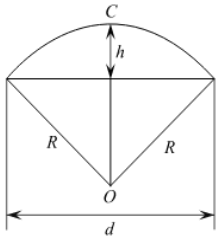




Рис. 2

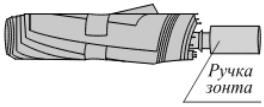



Рис. 3

**№ 1.** Длина зонта в сложенном виде равна 25 см и складывается из длины ручки (рис. 3) и трети длины спицы (зонт в три сложения). Найдите длину спицы, если длина ручки зонта равна 6,2 см.

**Решение.**

Из условия треть длины спицы составляет $25 - 6{,}2 = 18{,}8$ см, следовательно, длина спицы $18{,}8 \cdot 3 = 56{,}4$ см.

**Ответ**: 56,4.

**№ 2.** Поскольку зонт сшит из треугольников, рассуждал Петя, площадь его поверхности можно найти как сумму площадей треугольников. Вычислите площадь поверхности зонта методом Пети, если высота каждого равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 53,1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах с округлением до десятков.

**Решение.**

Площадь поверхности зонта является суммой площадей восьми равнобедренных треугольников с основанием 38 см и высотой 53,1 см. Таким образом, $S = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 53{,}1 = 8\,071{,}2$ см$^2$, округлив значение до десятков, получим 8 070 см$^2$.

**Ответ**: 8 070.

**№ 3.** Вася предположил, что купол зонта имеет форму сферического сегмента. Вычислите радиус $R$ сферы купола, зная, что $OC = R$ (рис. 2). Ответ дайте в сантиметрах.

**Решение.**

Радиус можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника, катеты которого $\frac{d}{2}$ и $R-h$, а гипотенуза $R$: $\left(\frac{d}{2}\right)^2+(R-h)^2=R^2 \Leftrightarrow R=\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2}{2h}$, откуда $R=\frac{2500+625}{2\cdot 25}=\frac{3125}{50}=62{,}5$ см.

**Ответ**: 62,5.

**№ 4**. Вася нашёл площадь купола зонта как площадь поверхности сферического сегмента по формуле $S=2\pi Rh$, где $R$ – радиус сферы, а $h$ – высота сегмента. Рассчитайте площадь поверхности купола способом Васи. Число $\pi$ округлите до 3,14. Ответ дайте в квадратных сантиметрах с округлением до целого.

**Решение.**

Воспользуемся значением $R$, полученным в предыдущем задании, тогда по формуле $S=2\pi Rh$ рассчитаем площадь поверхности купола:

$$S=2\cdot 3{,}14\cdot 62{,}5\cdot 25=9\,812{,}5 \text{ см}^2.$$

Округлив результат до целого, получим 9 813 $\text{см}^2$.

**Ответ**: 9 813.

**№ 5.** Рулон ткани имеет длину 35 м и ширину 80 см. На фабрике из этого рулона были вырезаны треугольные клинья для 29 зонтов, таких же, как зонт, который был у Пети и Васи. Каждый треугольник с учётом припуска на швы имеет площадь 1050 кв. см. Оставшаяся ткань пошла в обрезки. Сколько процентов ткани рулона пошло в обрезки?

**Решение.**

Заметим, что длина дана в метрах, переведем в сантиметры: 35 м = 3 500 см. Площадь рулона составляет $3500 \cdot 80 = 280\,000$ (см$^2$), площадь получившихся зонтиков – $29 \cdot 8 \cdot 1050 = 243\,600$ (см$^2$).

Найдем долю обрезков ткани рулона:

$$\frac{280000-243600}{280000} \cdot 100\% = \frac{36400 \cdot 100}{280000} = \frac{364}{28} = 13\%.$$

**Ответ**: 13.

## Задания № 14

**№ 1.** Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных каждым из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько же рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количества рыб, пойманных юношами, образовали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

**Решение.**

Пусть Ваня поймал $b_1$ рыб. Тогда Миша $b_1 + q$, Алик $b_1 + 2q$, Вадим $b_1 + 3q$.

Арифметическая прогрессия:

$$b_1, b_1 + q, b_1 + 2q, b_1 + 3q.$$

Геометрическая прогрессия:

$$b_1, b_1 + q, b_1 + 3q, b_1 + 3q + 12.$$

1) $\frac{b_1 + 3q}{b_1 + q} = \frac{b_1 + q}{b_1}$

$b_1^2 + 3b_1q = b_1^2 + 2 + 2b_1q + q^2$

$q(b_1 - q) = 0$

$b_1 = q$

2) $\frac{b_1 + 3q + 12}{b_1 + 3q} = \frac{b_1 + 3q}{b_1 + q}$

$$\frac{4b_1 + 12}{4q} = \frac{4q}{2q}$$

$$\frac{4b_1+12}{4q} = 2$$

$$8q = 4b_1 + 12.$$

Учитывая, что $b_1 = q$, получаем $q = 3 = b_1$. Тогда Миша поймал $3 + 3 = 6$ рыб.

**Ответ**: 6.

**№ 2.** Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

**Решение.**

Пусть бригада в первый день покрасила $a_1$ метров забора, во второй – $a_2, \ldots$, в последний – $a_n$ метров забора. Т.к. бригада ежедневно увеличивала норму покраски на одно и то же число метров, то последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образует арифметическую прогрессию. Тогда $a_1 + a_n = 60$ м, а за $n$ дней было покрашено $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = 30n$ метров забора.

Поскольку всего было покрашено 240 метров забора, имеем: $30n = 240$, откуда $n = 8$. Таким образом, бригада красила забор в течение 8 дней.

**Ответ**: 8.

**№ 3.** Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за

2003 год?

**Решение.**

*1 способ.*

Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом.

Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5\,000 \cdot 4^3 = 320\,000$ рублей.

*2 способ.*

Прибыль можно найти последовательно: за 2001 год – 20 тыс. р., за 2002 год – 80 тыс. р., за 2003 год – 320 тыс. р.

**Примечание.**

В задаче речь идет о прибыли, то есть о сумме, заработанной за год, а не о капитале на конец года. Поэтому не следует отнимать от суммы, заработанной в текущем году, сумму, заработанную в предыдущем году.

Ответ: 320 000.

Решая задачи № 14 важно отметить, что некоторые из них могут быть решены простыми вычислениями, а не только с помощью формул прогрессий.

В заключение хотелось бы отметить, что важно говорить детям: «Я могу решить все задачи ОГЭ, и вы скажите, что это легко, но пока вы не возьмете в руки ручку и не начнете решать сами, ничего не получится».

*Литература*

1. Ященко, И.В. ОГЭ 2022 по математике 36 экзаменационных типовых вариантов. – М., 2022.

2. Сдам ГИА: Решу ОГЭ. Математика / Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://math-oge.sdamgia.ru/ (дата обращения: 19.05.2024).

## Сведения об авторском коллективе

Баянкина Людмила Анатольевна, учитель математики МБОУ «Лицей №124» г. Барнаула;

Борисова Наталья Геннадьевна, учитель математики МБОУ «Первомайская СОШ» с. Черемное Павловского района;

Деменева Алена Васильевна, учитель математики МБОУ «Первомайская СОШ» Бийского района;

Дергачева Светлана Владимировна, учитель математики МБОУ «Гимназия №79» г. Барнаула;

Кардакова Юлия Ивановна, учитель математики МБОУ «Сорочелоговская СОШ» с. Сорочий Лог;

Кравцова Татьяна Владимировна, учитель математики МКОУ Топчихинской средней общеобразовательной школы №1 имени Героя России Дмитрия Ерофеева с. Топчиха;

Маколкина Татьяна Викторовна, учитель математики МБОУ «Гимназия №123» г. Барнаула;

Положеева Лариса Юрьевна, учитель математики МБОУ «Гимназия № 42» г. Барнаула;

Попова Елена Геннадьевна, учитель математики МБОУ «Советская СОШ» с. Советское Павловского района;

Поползин Кирилл Евгеньевич, учитель математики МБОУ «Гимназия №123» г. Барнаула;

Рубцова Татьяна Геннадьевна, учитель математики МБОУ Калманская средняя общеобразовательная школа имени Г.А. Ударцева с. Калманка;

Сметанникова Елена Викторовна, учитель математики МБОУ «Гимназия № 42» г. Барнаула;

Чухловина Маргарита Ивановна, учитель математики и информатики МКОУ «Сосновская СОШ», с. Сосновка Заринского района.

*Учебное издание*

**Передовые подходы в преподавании математики**
(из опыта работы учителей математики Алтайского края)

Под ред. М.А. Гончаровой, Н.В. Решетниковой

Дизайн обложки ООО «АЗБУКА»,
верстка Н.В. Решетникова, А.А. Елютина.

Подписано в печать 04.11.2024. Формат 60/84/16. Усл. п. л. 10.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 150 экз. Заказ № 389.
Отпечатано в типографии ООО «Азбука»,
656049, Алтайский край,
г. Барнаул, Мерзликина, 10
тел. (3852) 62-91-03, электронная почта: azbuka@mail.ru