

# Новые инструменты и полезные ресурсы для школьного учителя математики

**Зубкова Екатерина Дмитриевна**, ведущий методист ГК «Просвещение»,  
автор-разработчик методических пособий,  
автор и преподаватель обучающих курсов для педагогов  
[EZubkova@prosv.ru](mailto:EZubkova@prosv.ru)



Класс	Предмет/ учебный курс	Наименование учебника	Номер в ФПУ
5	Математика	Математика: 5-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С. и другие	1.1.2.4.1.1.1
6	Математика	Математика: 6-й класс: базовый уровень: учебник: в 2 частях. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С. и другие	1.1.2.4.1.1.2
7	Алгебра	Математика. Алгебра: 7-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие: под ред. Теляковского С.А.	1.1.2.4.1.1.3
8	Алгебра	Математика. Алгебра: 8-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие: под ред. Теляковского С.А.	1.1.2.4.1.1.4
9	Алгебра	Математика. Алгебра: 8-й класс: базовый уровень: учебник. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие: под ред. Теляковского С.А.	1.1.2.4.1.1.5
7 - 9	Геометрия	Математика. Геометрия: 7-9 классы: базовый уровень: учебник Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие	1.1.2.4.1.2.1
7 - 9	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 7-9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях. Высоцкий И.Р., Яценко И.В.; под ред. Яценко И.В.	1.1.2.4.1.3.1



Виленкин

<https://go.prosv.ru/qHG7tR>

Макарычев

<https://go.prosv.ru/RG7gMA>



Атанасян

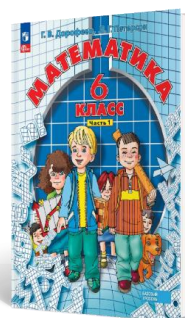
<https://go.prosv.ru/AWWqDs>

Высоцкий

<https://go.prosv.ru/x9WxjF>



Класс	Предмет/ учебный курс	Наименование учебника	Номер в ФПУ
5	Математика	Математика: 5-й класс: углублённый уровень: учебник: в 2 частях. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	2.1.2.4.1.1.1.
6	Математика	Математика: 6-й класс: углублённый уровень: учебник: в 3 частях. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	2.1.2.4.1.1.2.
7	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 7-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.1.5.1.
8	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 8-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.1.5.2.
9	Вероятность и статистика	Математика. Вероятность и статистика: 9-й класс: углублённый уровень: учебник. Е.А. Бунимович, В.А. Булычев	2.1.2.4.1.5.3.



Вероятность и статистика : 7 - 9е классы : углублённый уровень : учебник : в 2 частях. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»



№ ФПУ 2.1.2.4.1.6.1  
№ строки 1252 (1)

Класс	Предмет/ учебный курс	Наименование учебника	Номер в ФПУ
10-11	Алгебра и начала математического анализа	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Алимов Ш.А. и др.	1.1.3.4.1.1.1.
10-11	Геометрия	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Атанасян Л.С. и др.	1.1.3.4.1.2.1.
<b>До 25 сентября 2030 года</b>			
10	Алгебра и начала математического анализа	Математика. Алгебра и начала математического анализа; углублённое изучение. Мерзляк А.Г. и др.	1.1.3.4.1.3.1.
11	Алгебра и начала математического анализа	Математика. Алгебра и начала математического анализа; углублённое изучение. Мерзляк А.Г. и др.	1.1.3.4.1.3.2.
10	Геометрия	Математика. Геометрия. Мерзляк А.Г. и др.	1.1.3.4.1.4.1.
11	Геометрия	Математика. Геометрия. Мерзляк А.Г. и др.	1.1.3.4.1.4.2.



АЛИМОВ

<https://go.prosv.ru/nKGLqk>

Атанасян

<https://go.prosv.ru/jdsJty>



Мерзляк

<https://go.prosv.ru/eopFPW>

Мерзляк  
Геометрия

<https://go.prosv.ru/XfkKry>



## МАТЕМАТИКА НА РЕЗУЛЬТАТ: новые инструменты и полезные ресурсы для школьного учителя



**Яценко Иван  
Валериевич**

кандидат физико-математических наук, директор МЦНМО, научный руководитель ЦПМ, руководитель федеральной комиссии разработчиков КИМ для ЕГЭ, автор учебно-методических пособий по математике



**Волчкевич Максим  
Анатольевич**

Старший методист Центра Педагогического Мастерства и кафедры физ.-мат. образования МФТИ. Учитель математики в школах г. Москвы: Школа 57, «Вторая школа», «Школа ЦПМ». Лауреат конкурса «Грант Москвы», лауреат гранта фонда «Династия» в номинациях «Наставник будущих учёных» и «Учитель, воспитавший Ученика», лауреат премии Москвы в области образования, автор учебно-методических пособий по геометрии



**Прокофьев Александр  
Александрович**

доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики МИЭТ, Почетный работник сферы образования РФ, автор учебно-методических пособий по математике

В рамках методического дня для учителей математики представили актуальный обзор учебно-методической литературы и новых цифровых решений. В программе выступления авторов учебников и учебных пособий, экспертные комментарии методистов и мастер-классы по интеграции цифровых инструментов в образовательный процесс.



**Высоцкий Иван  
Ростиславович**

руководитель лаборатории теории вероятностей МЦНМО, заместитель председателя федеральной комиссии по разработке КИМ ЕГЭ по математике, автор учебников и учебно-методических пособий по математике



**Разинкова Елена  
Александровна**

учитель высшей категории ГБОУ школы № 1576, г. Москва, старший эксперт ЕГЭ, участник педагогической экспертизы учебников, автор учебно-методических пособий



**Пратусевич Максим  
Яковлевич**

кандидат физико-математических наук, директор ФМЛ №239, г. Санкт-Петербург, Почётный работник общего образования Российской Федерации, Заслуженный учитель, автор учебно-методических пособий



**Мардахаева Елена  
Львовна**

кандидат педагогических наук, доцент, Лауреат Премии Грант Москвы в сфере образования, педагогический дизайнер АО «Издательство «Просвещение» автор УМК «Лаборатория А. Г. Мордковича»



<https://go.prosv.ru/NejpYC>

Математика технологического прорыва : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

Математика технологического прорыва : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»



№№ ФПУ 2.1.3.4.1.1.1 – 2.1.3.4.1.2  
№№ строки 1331 (1) – 1331 (2)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Глава I. Введение</b> .....	<b>Глава IV. Корень, степень, логарифм</b> .....	<b>Глава VIII. Производная</b> .....
§ 1. Высказывания и предикаты .....	§ 28. Корень натуральной степени .....	§ 51. Определение производной .....
§ 2. Множества и операции над ними .....	§ 29. Обобщение понятия степени .....	§ 52. Производные некоторых элементарных функций .....
§ 3. Кванторы. Структура теорем .....	§ 30. Логарифм .....	§ 53. Задача о касательной. Уравнение касательной .....
§ 4. Метод математической индукции .....	<i>Задачи и упражнения</i> .....	§ 54. Приближение функции линейной функцией. Дифференциал .....
§ 5. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона .....	Список дополнительной литературы .....	§ 55. Производная произведения, частного, композиции функций .....
§ 6. Особенности множества вещественных чисел .....	Предметный указатель .....	§ 56. Первая и вторая производные. Производные высших порядков .....
§ 7. Мощность множеств .....	<b>Глава V. Тригонометрия</b> .....	<i>Задачи и упражнения</i> .....
§ 8. Уравнения с одной переменной. Равносильность и следование .....	§ 31. Обобщённый угол. Измерение углов в радианах и градусах. Единичная (тригонометрическая) окружность .....	Заключение .....
§ 9. Неравенства с одной переменной .....	§ 32. Синус, косинус, арксинус, арккосинус .....	Список дополнительной литературы .....
§ 10. Уравнения и неравенства с модулем .....	§ 33. Тангенс, котангенс, арктангенс, арккотангенс .....	Проверь себя .....
§ 11. Задачи, связанные с расположением корней квадратного трёхчлена .....	§ 34. Тригонометрические формулы. Метод вспомогательного аргумента .....	Ответы .....
§ 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными .....	§ 35. Тригонометрические функции и их свойства .....	Справочные материалы .....
§ 13. Системы линейных уравнений с числом неизвестных, большим 2 .....	§ 36. Обратные тригонометрические функции .....	Предметный указатель .....
§ 14. Проценты .....	§ 37. Тригонометрические уравнения .....	
<i>Задачи и упражнения</i> .....	<i>Задачи и упражнения</i> .....	
<b>Глава II. Многочлены</b> .....	<b>Глава VI. Предел последовательности</b> .....	
§ 15. Понятие многочлена .....	§ 38. Понятие последовательности. Свойства последовательностей .....	
§ 16. Многочлены от одной переменной. Метод неопределённых коэффициентов .....	§ 39. Последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии .....	
§ 17. Деление многочленов с остатком .....	§ 40. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей .....	
§ 18. Теорема Безу и её следствия. Совпадение формального и функционального равенства многочленов .....	§ 41. Действия над сходящимися последовательностями. Вычисление пределов .....	
§ 19. Многочлены с целыми коэффициентами .....	§ 42. Предел монотонной последовательности. Число $e$ . Комбинированные методы нахождения пределов .....	
§ 20. Теорема Виета и симметрические многочлены .....	§ 43. Подпоследовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса .....	
<i>Задачи и упражнения</i> .....	<i>Задачи и упражнения</i> .....	
<b>Глава III. Функция. Основные понятия</b> .....	<b>Глава VII. Предел и непрерывность функции</b> .....	
§ 21. Понятие функции .....	§ 44. Понятие предела функции .....	
§ 22. Способы задания функции. График функции. Некоторые элементарные функции .....	§ 45. Некоторые свойства пределов функции .....	
§ 23. Некоторые свойства функций .....	§ 46. Вычисление предела функции в точке .....	
§ 24. Композиция функций. Обратная функция .....	§ 47. Классификация бесконечно малых функций .....	
§ 25. Элементарные преобразования графиков функций .....	§ 48. Непрерывность функций в точке .....	
§ 26. Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности. Понятие об асимптотах .....	§ 49. Непрерывность функций на промежутке .....	
§ 27. Графическое решение уравнений и неравенств. Количество корней уравнения $f(x) = a$ .....	§ 50. Асимптоты графика функции .....	
<i>Задачи и упражнения</i> .....	<i>Задачи и упражнения</i> .....	

Математика технологического прорыва : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

№ ФПУ 2.1.3.4.1.1.1  
№ строки 1331 (1)

## § 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Итак, требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & \text{(а)} \\ a_2x + b_2y = c_2, & \text{(б)} \end{cases}$$

где искомыми неизвестными являются  $x$  и  $y$ .

Если одно из чисел  $a_1$  и  $a_2$  равно нулю, то одно из уравнений системы уже является линейным уравнением с одной переменной  $y$ , которое можно решить, а найденное значение  $y$  подставить в оставшееся уравнение и найти  $x$  (мы не рассматриваем случай  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 0$  одновременно, так как тогда система будет состоять из уравнений относительно одной переменной  $y$ )<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Мы отдельно оговариваем случай равенства нулю  $a_1$  или  $a_2$ , поскольку нельзя безнаказанно умножать уравнение на нуль!

Поэтому далее рассмотрим случай  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ . Умножим уравнение (а) на  $a_1$ , а уравнение (б) на  $a_2$ , получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2, \end{cases}$$

откуда после вычитания из верхнего уравнения

нижнего имеем  $(b_1a_2 - a_1b_2)y = c_1a_2 - a_1c_2$ .

Получилось линейное уравнение относительно  $y$ , наличие и число решений которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент перед  $y$ , т. е.  $b_1a_2 - a_1b_2$ .

1)  $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$ . Тогда можно найти единственное значение  $y$ , удовлетворяющее уравнению  $y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$ . Подставив найденное значение  $y$  в любое исходное уравнение, получаем  $x = \frac{-c_1b_2 + b_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$  (при

этом, если, например, подставлять в первое уравнение, возникает необходимость делить на  $a_1 \neq 0$ ).

2)  $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$ . Тогда, если  $c_1a_2 - a_1c_2 \neq 0$ , то уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. Если же  $c_1a_2 - a_1c_2 = 0$ , то уравнение имеет своими решениями все вещественные значения  $y$ . Тогда и система имеет бесконечно много решений, ведь по каждому  $y$  может быть найден  $x$  из любого уравнения системы.

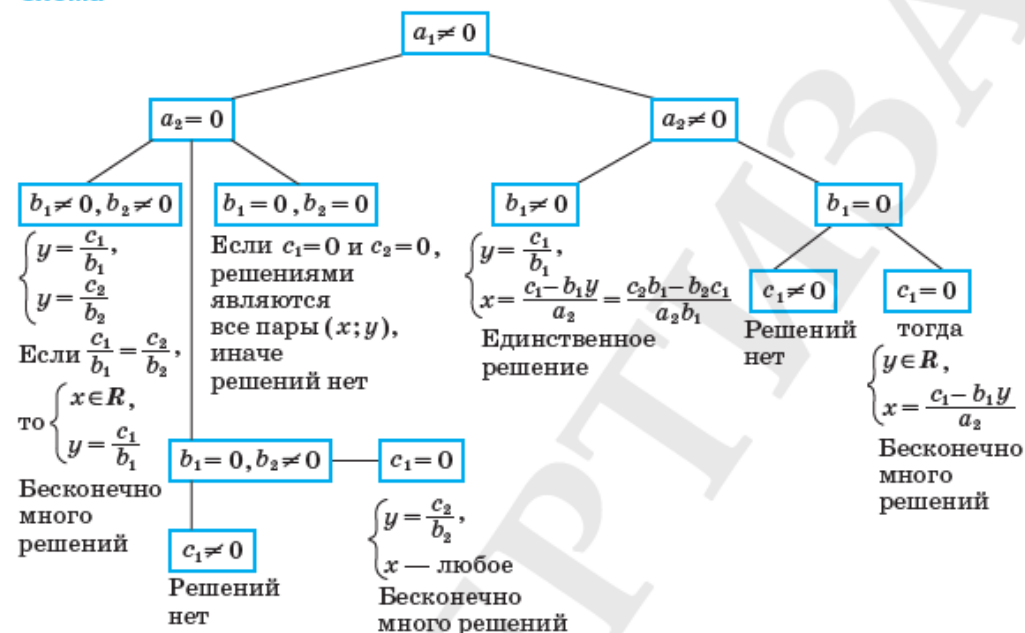
Случаи нулевых коэффициентов рассмотрены в [схеме](#) (с. 89).

Для системы линейных уравнений  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  полученные

результаты, включая результаты в [схеме](#), можно обобщить.

## § 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Схема



Если  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , то система имеет единственное решение, вы-

числяемое по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Если же  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  (причём не все из чисел  $a_1, b_1, a_2, b_2$  равны нулю), то в случае, если хотя бы одно из чисел  $c_1b_2 - c_2b_1$  и  $a_1c_2 - a_2c_1$  не равно нулю, система не имеет решений. Если же оба этих числа равны нулю, то система имеет бесконечно много решений. ■

Поэтому далее рассмотрим случай  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ . Умножим уравнение (а) на  $a_1$ , а уравнение (б) на  $a_2$ , получим систему

$$\begin{cases} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2, \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2, \end{cases}$$

откуда после вычитания из верхнего уравнения

нижнего имеем  $(b_1a_2 - a_1b_2)y = c_1a_2 - a_1c_2$ .

Получилось линейное уравнение относительно  $y$ , наличие и число решений которого зависит от того, равен ли нулю коэффициент перед  $y$ , т. е.  $b_1a_2 - a_1b_2$ .

1)  $b_1a_2 - a_1b_2 \neq 0$ . Тогда можно найти единственное значение  $y$ , удовлетворяющее уравнению  $y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$ . Подставив найденное значение  $y$  в любое исходное уравнение, получаем  $x = \frac{-c_1b_2 + b_1c_2}{b_1a_2 - a_1b_2}$  (при этом, если, например, подставлять в первое уравнение, возникает необходимость делить на  $a_1 \neq 0$ ).

2)  $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$ . Тогда, если  $c_1a_2 - a_1c_2 \neq 0$ , то уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. Если же  $c_1a_2 - a_1c_2 = 0$ , то уравнение имеет своими решениями все вещественные значения  $y$ . Тогда и система имеет бесконечно много решений, ведь по каждому  $y$  может быть найден  $x$  из любого уравнения системы.

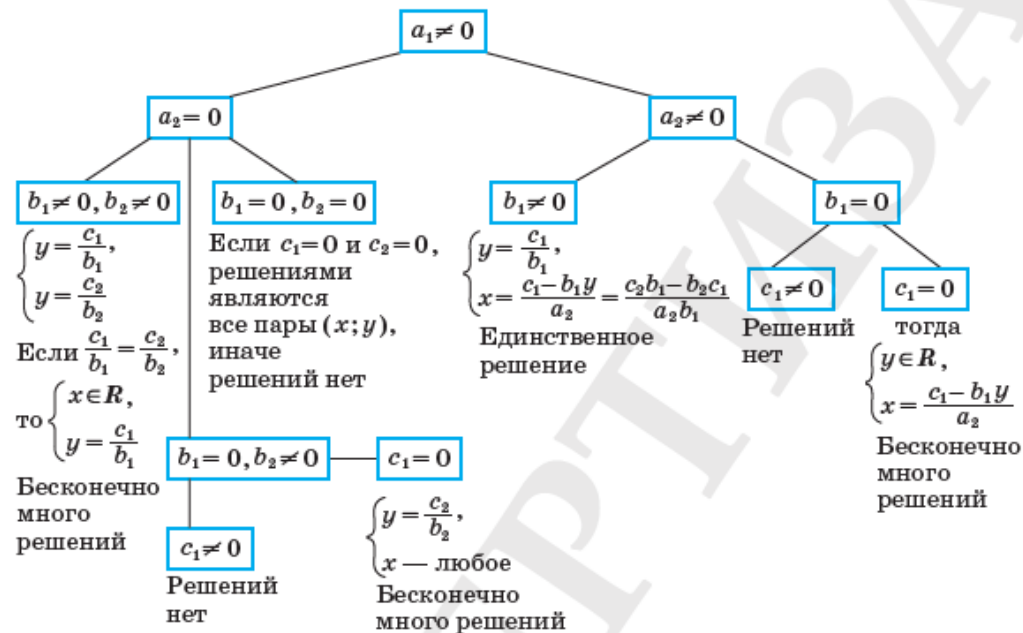
Случаи нулевых коэффициентов рассмотрены в [схеме](#) (с. 89).

Для системы линейных уравнений  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  полученные

результаты, включая результаты в [схеме](#), можно обобщить.

## § 12. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Схема



Если  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , то система имеет единственное решение, вы-

числяемое по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Если же  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  (причём не все из чисел  $a_1, b_1, a_2, b_2$  равны нулю), то в случае, если хотя бы одно из чисел  $c_1b_2 - c_2b_1$  и  $a_1c_2 - a_2c_1$  не равно нулю, система не имеет решений. Если же оба этих числа равны нулю, то система имеет бесконечно много решений. ■

Заметим, что выражения, о которых шла речь выше, устроены схожим образом. Для таких выражений придумано специальное обозначение:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ . Такое выражение в этом обозначении называется *определителем второго порядка*.

Понятие определителя вводится для конечных квадратных таблиц. Порядок определителя — это число строк или столбцов в соответствующей таблице. Общее определение и правила вычисления определителя выходят за рамки нашего курса.

С помощью введённого обозначения можно переписать результат решения системы следующим образом:

Если  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , то 
$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$
 (эти формулы называются *формулами Крамера*).

Если же  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$  и хотя бы одно из выражений  $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$  не равно нулю, система решений не имеет. Если  $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$  и  $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или не имеет их вовсе.

**Пример 100.** Пусть  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ;  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Найдём  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}$ .

■ По определению,  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta - \alpha)$ . Учитывая, что  $\alpha\beta = -1$ ,  $\alpha - \beta = -\sqrt{5}$ , получаем  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = \sqrt{5}$ . Заметим, что  $\alpha$  и  $\beta$  — суть корни квадратного уравнения  $t^2 - t - 1 = 0$ . ■

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава IX. Применение производной

- § 57. Первообразная
- § 58. Неопределённый интеграл
- § 59. Французские теоремы
- § 60. Исследование функции с помощью производной
- § 61. Выпуклые функции
- § 62. Построение эскизов графиков с помощью производной.  
Решение задач с помощью производной
- Задачи и упражнения

### Глава X. Определённый интеграл и знакомство с дифференциальными уравнениями

- § 63. Площадь криволинейной трапеции
- § 64. Определённый интеграл
- § 65. Свойства определённого интеграла
- § 66. Применение определённого интеграла
- § 67. Дифференциальные уравнения
- Задачи и упражнения

### Глава XI. Комплексные числа

- § 68. Определение комплексных чисел.  
Алгебраическая форма записи и арифметические действия над комплексными числами
- § 69. Комплексные числа и многочлены. Основная теорема алгебры
- § 70. Геометрическое представление и тригонометрическая форма записи комплексных чисел
- § 71. Корень  $n$ -й степени из комплексного числа
- § 72. Применения комплексных чисел
- Задачи и упражнения

### Глава XII. Целые числа

- § 73. Деление с остатком целых чисел
- § 74. Сравнения. Перебор остатков
- § 75. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых чисел
- § 76. Взаимно простые числа
- § 77. Простые числа. Основная теорема арифметики
- Задачи и упражнения

### Глава XIII. Уравнения и неравенства

- § 78. Некоторые способы решения уравнений
- § 79. Целые рациональные и дробно-рациональные уравнения
- § 80. Системы алгебраических уравнений и неравенств

- § 81. Уравнения и неравенства с параметром.  
Аналитическое исследование
- § 82. Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами
- § 83. Графический метод решения уравнений и неравенств с параметрами в плоскости  $(x; a)$
- § 84. Графический метод решения уравнений и неравенств с параметрами в плоскости  $(x; y)$
- § 85. Использование свойств функций при решении уравнений с параметрами
- § 86. Иррациональные уравнения и системы
- § 87. Иррациональные неравенства
- § 88. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами
- § 89. Показательные уравнения и неравенства
- § 90. Логарифмические уравнения и неравенства
- § 91. Тригонометрические уравнения и неравенства
- Задачи и упражнения

### Глава XIV. Повторение

- Задачи и упражнения

- Список дополнительной литературы
- Предметный указатель

Математика технологического прорыва : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. АО «Издательство «Просвещение»

№ ФПУ 2.1.3.4.1.1.2  
№ строки 1331 (2)

## § 67. Дифференциальные уравнения

### 1. Понятие о дифференциальных уравнениях.

#### Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В разных задачах физики и математики встречаются уравнения, в которых в роли искомого неизвестного присутствуют функции. Уравнения, в которые наряду с неизвестной функцией и её аргументом входят производные искомого функции, называются *дифференциальными уравнениями*.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Уравнение вида  $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$  называется дифференциальным уравнением порядка  $n$ .

Когда мы в предыдущих параграфах находили первообразные данной функции  $f$ , мы фактически решали простейшие дифференциальные уравнения  $y' = f$ , искомым неизвестной функцией в которых является  $y$ .

**Пример 30.** Уравнение вида  $y'' + \omega^2 y = 0$ , где искомым неизвестной функцией является функция  $y(t)$ , могло встречаться на уроках физики как уравнение гармонических колебаний с частотой  $\omega$ . Добавление периодической вынуждающей силы, колеблющейся с той же частотой (и нулевым сдвигом по фазе), даёт явление резонанса, а соответствующее уравнение будет выглядеть как  $y'' + \omega^2 y = A \cos \omega t$  (обратите внимание, что в это уравнение входит не только неизвестная функция  $y$  и её производные, но и  $t$  — аргумент этой функции). Рассмотренные уравнения являются уравнениями второго порядка.

Таким образом, дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка, если из производных в них входит только первая производная. Дифференциальные уравнения называются уравнениями второго порядка, если, наряду с независимой переменной, искомым функцией этой переменной, в него входят первая и вторая производные и не входят производные более высоких порядков.

К дифференциальным уравнениям приводят многие задачи. Рассмотрим некоторые из них.

#### Радиоактивный распад

Известен экспериментально установленный факт, что при распаде радиоактивного вещества отношение количества атомов, распавшихся за время  $\Delta t$ , к общему количеству атомов не зависит от количества вещества  $M(t)$  и является константой  $k$ , зависящей только от вещества и называемой вероятностью распада.

Запишем приращение количества вещества за момент времени  $\Delta t$ :  $M(t + \Delta t) - M(t) = -kM(t)\Delta t + o(\Delta t)$  (знак «минус» отражает факт убывания количества вещества)<sup>1</sup>. Разделив обе части равенства на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, получим дифференциальное уравнение  $M'(t) = -kM(t)$ , которому должно удовлетворять количество вещества.

Рассмотрим подробнее дифференциальное уравнение, появившееся у нас в этой задаче.

#### ТЕОРЕМА существования и единственности решений дифференциального уравнения $y' = ky$

Решением дифференциального уравнения  $y' = ky$  являются все функции вида  $y = Ce^{kx}$ , где  $C$  — некоторое вещественное число, и только они.

**Пример 31.** Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству вещества. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается через 1600 лет. Какой процент первоначального запаса радия распадётся через 5600 лет?

□ Пусть  $M(t)$  — количество радия в момент времени  $t$ . По доказанному выше  $M(t) = Ce^{-kt}$ , при этом  $k = \frac{\ln 2}{T}$ , где  $T$  — период полураспада радия, равный, как следует из условия, 1600 лет. Тогда  $M(5600) = C \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600} \cdot 5600} = C \cdot 2^{-3,5}$  и через 5600 лет распадётся

$$\left(1 - \frac{M(5600)}{M(0)}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{C \cdot 2^{-3,5}}{C}\right) \cdot 100\% \approx 91\% \text{ радия. } \blacksquare$$

## § 67. Дифференциальные уравнения

### 1. Понятие о дифференциальных уравнениях.

#### Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

### 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ещё один часто встречающийся в задачах тип дифференциальных уравнений — уравнения с разделяющимися переменными.

Некоторые дифференциальные уравнения можно представить в виде  $f(y) \cdot y' = g(x)$ . Такие уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными и могут быть решены следующим способом.

Запишем  $y' = \frac{dy}{dx}$ , получив уравнение  $f(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$ . «Домножив

его на  $dx$ », получим  $f(y)dy = g(x)dx$ . Проинтегрировав в последнем равенстве обе части, получим  $F(y) + C_1 = G(x) + C_2$ , где  $F(x)$  — некоторая первообразная  $f$ , а  $G(x)$  — некоторая первообразная  $g$ , или, в силу произвольности констант  $C_1$  и  $C_2$ ,  $F(y) = G(x) + C$ . Из последнего уравнения часто удаётся выразить функцию  $y$  в явном виде через  $x$ .

**Пример 33.** Решите дифференциальное уравнение  $y'y^2 = x$ .

□  $y'y^2 = x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} y^2 = x \Leftrightarrow y^2 dy = x dx$ , откуда, проинтегрировав левую

и правую части, получаем  $\int y^2 dy = \int x dx \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2 \Leftrightarrow \frac{y^3}{3} =$

$= \frac{x^2}{2} + C$ . Отсюда получаем, что  $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C}$ <sup>1</sup>. □

<sup>1</sup> Обратите внимание, что константа  $C$  в обеих частях последнего равенства хоть и обозначена одной и той же буквой, но не одинакова (в последнем выражении она втрое больше, чем в предпоследнем), поскольку означает произвольную постоянную, принимающую все вещественные значения. Сравните такое вольное обращение с записями решений тригонометрических уравнений:  $-x = \pi k$  приводит к  $x = \pi k$  при  $k \in \mathbb{Z}$ , так как буква  $k$  означает переменную, принимающую все целые значения.

### 3. Гармонические колебания и примеры дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим важный пример ещё одной задачи, приводящей к дифференциальным уравнениям, на этот раз второго порядка.

Пусть грузик массы  $m$  прикреплен к концу горизонтальной пружины жёсткости  $k$ . В неподвижном положении грузик находится в начальной точке оси  $x$ , направленной вправо. Растянем эту пружину на длину  $x$  и отпустим.

□ Выведем уравнение, задающее координату грузика  $x(t)$  в зависимости от времени (рис. 10.16).

Согласно закону Гука, при малом отклонении грузика на длину  $x$  на него будет действовать сила упругости  $F = -kx$ . По закону Ньютона произведение массы грузика  $m$  на ускорение  $x''$  равно силе, действующей на грузик в данный момент, т. е.  $F = mx'' = -kx$ , откуда получаем дифференциальное уравнение, описывающее движение грузика:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \text{ где } \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad \blacksquare$$

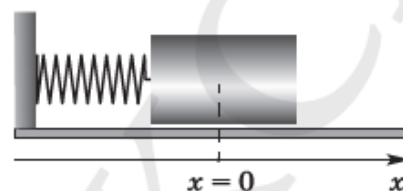


Рис. 10.16

Как уже отмечено выше, уравнение

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

называется уравнением гармонических колебаний и встречается во многих физических задачах.

#### ТЕОРЕМА

Решениями уравнения  $y'' + \omega^2 y = 0$  являются все функции вида  $y = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ , где  $a$  и  $b$  — любые постоянные.

# СКОРО В ФПУ. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Математическая вертикаль : 10-11-е классы : углублённый уровень : учебник по вероятности и статистике для физико-математических классов. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.4.1.2.1. № строки 1331(3 <sup>1</sup> )
Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.4.1.3.1. № строки 1331(3 <sup>2</sup> )
Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.4.1.3.2. № строки 1331(3 <sup>4</sup> )
Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. Часть 1: Волчкевич М.А., под ред. Яценко И.В. Часть 2: Самсонов П.И., Шестаков С.А., под ред. Яценко И.В. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.4.1.4.1. № строки 1331(3 <sup>5</sup> )
Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. П. И. Самсонов, С. А. Шестаков ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»	№ ФПУ 2.1.3.4.1.4.2. № строки 1331(3 <sup>6</sup> )

Проект приказа МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ «Об утверждении федерального перечня учебников...»



<https://regulation.gov.ru/projects/165018/>



## АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение	
Глава 1. Повторение курса алгебры 7–9 классов	Глава 6. Тригонометрические выражения
§1. Рациональные числа	§28. Формулы суммы и разности аргументов
§2. Текстовые задачи на проценты и доли	§29. Формулы двойного угла
§3. Действительные числа	§30. Формулы понижения степени
§4. Приближённые вычисления	§31. Преобразование и вычисление значений тригонометрических выражений
§5. Множества	§32. Преобразование суммы и произведения тригонометрических функций
§6. Выражения с переменными	§33. Решение тригонометрических уравнений
§7. Дробно-рациональные уравнения и неравенства	Глава 7. Логарифмы
§8. Текстовые задачи	§34. Показательные уравнения и неравенства
Глава 2. Функции	§35. Определение логарифма
§9. Свойства функций	§36. Свойства логарифмов
§10. Линейные функции	§37. Логарифмические уравнения и неравенства
§11. Квадратичные функции	Глава 8. Производная
§12. Дробно-рациональные функции	§38. Непрерывные функции
§13. Преобразования графиков*	§39. Понятие производной функции
§14. Композиция функций*	§40. Правила дифференцирования
Глава 3. Степени и корни	§41. Вторая производная
§15. Степень с целым показателем	§42. Дифференцирование сложной и обратной функций
§16. Корень $n$ -й степени	§43. Уравнение касательной к графику функции
§17. Степень с рациональным показателем	Глава 9. Последовательности
§18. Иррациональные уравнения и неравенства	§44. Числовые последовательности
§19. Уравнения и неравенства со знаком модуля	§45. Арифметическая прогрессия
Глава 4. Числовая окружность и тригонометрия	§46. Геометрическая прогрессия
§20. Числовая окружность	§47. Метод математической индукции
§21. Синус и косинус	§48. Прогрессии в задачах экономического содержания
§22. Тангенс и котангенс	Глава 10. Матрицы
§23. Преобразование тригонометрических выражений	§49. Системы линейных уравнений
Глава 5. Тригонометрические функции и уравнения	§50. Матрицы
§24. Тригонометрические функции и их графики	§51. Определители
§25. Обратные тригонометрические функции	
§26. Простейшие тригонометрические уравнения	
§27. Методы решения тригонометрических уравнений	
Задания для повторения	
Предметный указатель	

Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»

№ ФПУ 2.1.3.4.1.3.1.  
№ строки 1331(3<sup>2</sup>)

## АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

### Введение

#### Глава 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности

- §1. Равносильные преобразования . . . . .
- §2. Способы решения уравнений и неравенств . . . . .
- §3. Корень  $n$ -й степени . . . . .
- §4. Иррациональные уравнения и неравенства . . . . .
- §5. Степень с действительным показателем . . . . .
- §6. Показательные уравнения и неравенства . . . . .
- §7. Логарифмы . . . . .
- §8. Логарифмические уравнения и неравенства . . . . .

#### Глава 2. Тригонометрия

- §9. Простейшие тригонометрические уравнения . . . . .
- §10. Простейшие тригонометрические неравенства, их системы и совокупности . . . . .
- §11. Преобразование тригонометрических выражений . . . . .
- §12. Тригонометрические уравнения . . . . .
- §13. Тригонометрические неравенства . . . . .

#### Глава 3. Комплексные числа

- §14. Определение комплексного числа . . . . .
- §15. Тригонометрическая форма записи комплексного числа . . . . .
- §16. Решение уравнений в комплексных числах . . . . .
- §17. Функции комплексной переменной . . . . .

#### Глава 4. Исследование функции

- §18. Связь между свойствами функции и её производной . . . . .
- §19. Правила дифференцирования . . . . .
- §20. Исследование функций . . . . .
- §21. Построение графиков функций . . . . .
- §22. Задачи оптимизации . . . . .

#### Предметный указатель

#### Глава 5. Первообразная и интеграл

- §23. Первообразная . . . . .
- §24. Определённый интеграл . . . . .
- §25. Вычисление площади и объёма с помощью интеграла . . . . .
- §26. Дифференциальные уравнения\* . . . . .

#### Глава 6. Текстовые задачи

- §27. Прикладные задачи . . . . .
- §28. Текстовые задачи . . . . .
- §29. Арифметическая прогрессия в экономических задачах . . . . .
- §30. Геометрическая прогрессия в экономических задачах . . . . .
- §31. Другие экономические задачи . . . . .

#### Глава 7. Целые числа

- §32. Делимость целых чисел . . . . .
- §33. Десятичная запись числа . . . . .
- §34. Признаки делимости . . . . .
- §35. Основная теорема арифметики . . . . .
- §36. Деление с остатком . . . . .
- §37. Методы решения задач . . . . .
- §38. Решение задач . . . . .

#### Глава 8. Графические методы

- §45. Множества на координатной плоскости . . . . .
- §46. Решение уравнений, неравенств и систем графическим способом . . . . .

#### Глава 9. Задачи с параметрами

- §47. Линейные уравнения и неравенства с параметрами . . . . .
- §48. Квадратный трёхчлен в задачах с параметрами . . . . .
- §49. Рациональные уравнения и неравенства с параметрами . . . . .
- §50. Системы уравнений с параметрами . . . . .
- §51. Замена переменной в задачах с параметрами . . . . .
- §52. Графические способы решения задач с параметрами . . . . .
- §53. Применение свойств функций в задачах с параметрами . . . . .
- §54. Симметрия в задачах с параметрами . . . . .

Математическая вертикаль: 11-й класс : углублённый уровень : учебник по алгебре и началам математического анализа для физико-математических классов : в 2 частях. А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»

**№ ФПУ 2.1.3.4.1.3.2.  
№ строки 1331(3<sup>4</sup>)**

## ГЕОМЕТРИЯ

Как пользоваться книгой? . . . . .

### Глава 1. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ

- § 1. Фигуры в пространстве . . . . .
- § 2. Аксиомы пространства . . . . .
- § 3. Свойства плоскости . . . . .
- § 4. Сечения многогранников . . . . .

### Глава 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 5. Параллельность прямых и плоскостей . . . . .
- § 6. Параллельное проектирование . . . . .

### Глава 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 7. Углы между прямыми . . . . .
- § 8. Перпендикуляр к плоскости . . . . .
- § 9. Угол между прямой и плоскостью. . . . .

Справочник по избранным материалам 7-9 классов . . .

### Глава 4. УГЛЫ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

- § 10 Двугранный угол, линейный угол двугранного угла . . . . .
- § 11 Площадь ортогональной проекции . . . . .
- § 12 Трёхгранный и многогранные углы . . . . .
- § 13 Свойства плоских и двугранных углов трёхгранного угла
- § 14 Свойства плоских углов многогранного угла . . . . .
- § 15 Теоремы косинусов и синусов для трёхгранных углов . . . . .
- § 16 Начала сферической геометрии . . . . .

### Глава 5. МНОГОГРАННИКИ

- § 17 Понятие многогранника. Теорема Эйлера . . . . .
- § 18 Призма, параллелепипед . . . . .
- § 19 Пирамида . . . . .
- § 20 Правильные многогранники . . . . .
- § 21 Симметрия в пространстве . . . . .

### Глава 6. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 22 Векторы в пространстве и действия с векторами . . . . .
- § 23 Скалярное произведение векторов . . . . .
- § 24 Прямоугольная система координат в пространстве . . . . .

Математическая вертикаль : 10-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. Часть 1: Волчкевич М.А., под ред. Яценко И.В. Часть 2: Самсонов П.И., Шестаков С.А., под ред. Яценко И.В. АО «Издательство «Просвещение»

**№ ФПУ 2.1.3.4.1.4.1.  
№ строки 1331(3<sup>5</sup>)**

## ГЕОМЕТРИЯ

### Глава 1. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

- §1 Поверхности вращения . . . . .
- §2 Цилиндр . . . . .
- §3 Конус . . . . .
- §4 Сфера и шар . . . . .
- §5 Объем . . . . .
- §6 Комбинации тел вращения и многогранников . . . . .
- §7 Построение сечений многогранников и тел вращения . . . . .
- §8 Подобие в пространстве . . . . .

### Глава 2. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ (И КООРДИНАТЫ)

- §9. Уравнения плоскости . . . . .
- §10. Векторное произведение двух векторов . . . . .

### Глава 3. ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- §11. Движения пространства . . . . .
- §12. Виды движений . . . . .

### Задачи для подготовки к ЕГЭ




- Задачи для подготовки к ЕГЭ . . . . .

Математическая вертикаль : 11-й класс : углублённый уровень : учебник по геометрии для физико-математических классов : в 2 частях. П. И. Самсонов, С. А. Шестаков; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»



#### УПРАЖНЕНИЯ

Упражнения практического характера для освоения нового материала.

-  1. Упражнения для работы в парах.
-  2. Упражнения для работы в группах.
- 3.\* Упражнения повышенной сложности.
-  4. Упражнения для работы дома.



#### ВОПРОСЫ

Вопросы на повторение материала параграфа.



#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Подробный разбор задач всех типов с решениями.



#### ЗАДАЧИ

Задачи для самостоятельного решения трёх уровней сложности:

- ☆☆☆ простые;
- ★★☆ типовые;
- ★★★ повышенной сложности.



Дополнения к тексту, доказательству или решению задачи.



Упражнения для самостоятельного доказательства утверждения.



**Анализ.** Поиск решения задачи на построение.



**Построение.** Описание шагов построения искомой фигуры с помощью циркуля и линейки.



**Доказательство.** Обоснование полученного результата в процессе построения.



**Исследование.** Оценка числа решений задачи на построение фигуры в зависимости от данных в её условии.



Значок, указывающий на наличие рисунка к задаче.



Значок, указывающий на продолжение доказательства утверждения на следующей странице.

№ ФПУ 2.1.3.4.1.4.2.  
№ строки 1331(3<sup>6</sup>)

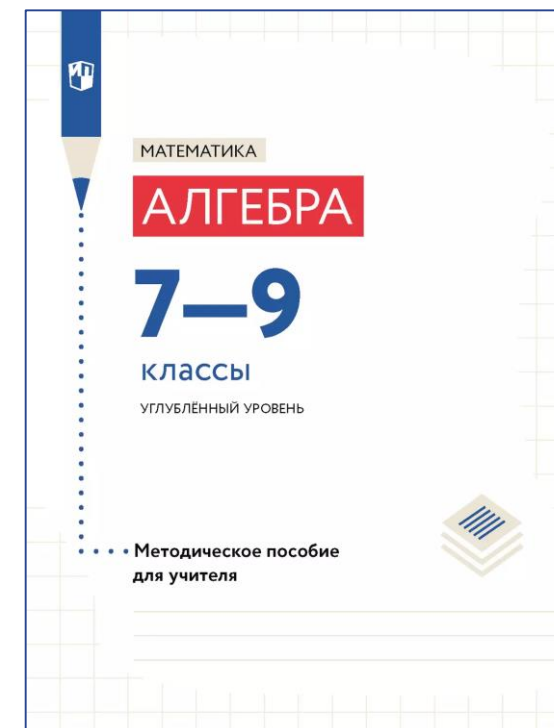
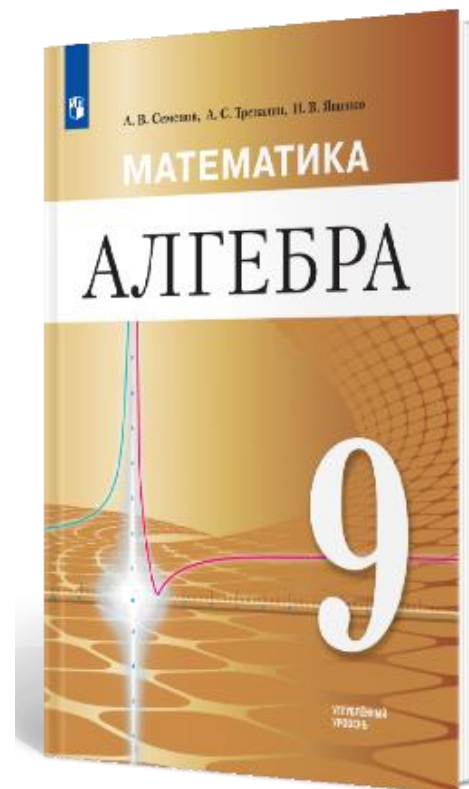
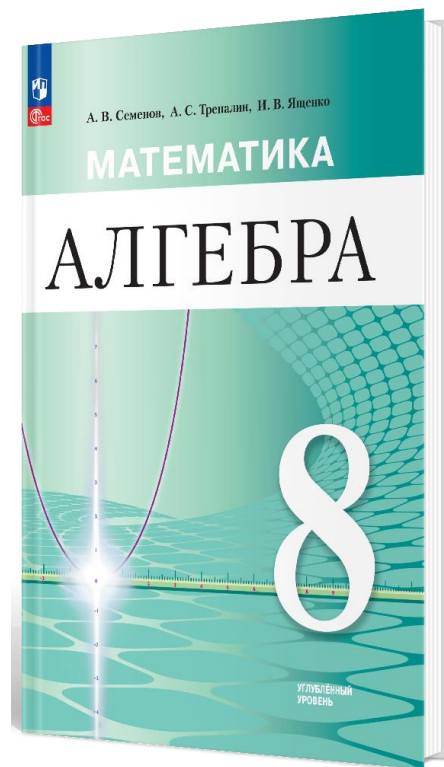
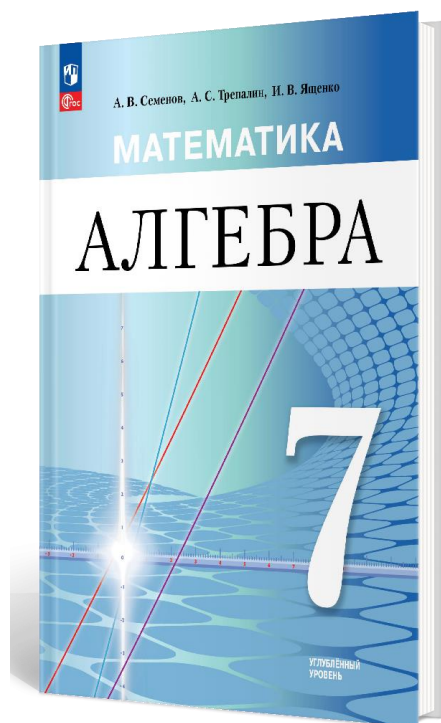
## ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

Предисловие .....	33. Независимые случайные величины .....
<b>Глава I. Представление данных и описательная статистика</b> .....	34. Свойства математического ожидания .....
1. Среднее арифметическое и медиана массива данных .....	35. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений .....
2. Сравнение описательных свойств среднего арифметического и медианы .....	<b>Глава VIII. Рассеивание случайных величин</b> .....
3. Квартили и урезанное среднее .....	36. Дисперсия и стандартное отклонение дискретной случайной величины
4. Межквартильный размах и диаграмма «ящик с усами» .....	37. Свойства дисперсии и стандартного отклонения .....
5*. Среднее квадратичное, среднее гармоническое и среднее геометрическое .....	38. Дисперсия и стандартное отклонение биномиального и геометрического распределений .....
6*. Степенные средние и неравенство о средних .....	<b>Глава IX. Закон больших чисел</b> .....
7. Дисперсия и стандартное отклонение .....	39. Неравенство Чебышёва .....
8. Свойства среднего арифметического и дисперсии .....	40. Закон больших чисел (теорема Чебышёва) .....
<b>Глава II. Элементы теории графов</b> .....	41. Близость частоты и вероятности. Теорема Бернулли .....
9. Графы и подграфы. Цепи, циклы и деревья .....	<b>Глава X. Элементы математической статистики</b> .....
10. Изоморфные графы. Плоские и планарные графы .....	42. Генеральная совокупность и случайная выборка .....
11. Степени вершин графа. Эйлеровы пути и эйлеровы графы .....	43. Оценки по выборке (выборочные оценки) .....
12*. Свойства деревьев, остовное дерево графа .....	44. Выборочные оценки среднего значения и дисперсии .....
13*. Эйлерова характеристика .....	45. Интервальные оценки .....
14*. Ориентированные графы .....	46. Проверка статистических гипотез .....
<b>Глава III. Случайные эксперименты и случайные события</b> .....	<b>Глава XI. Непрерывные случайные величины</b> .....
15. Случайный эксперимент, случайные события и вероятности .....	47. Примеры непрерывных случайных величин .....
16. Случайные опыты с равновероятными элементарными событиями .....	48. Функция плотности вероятности непрерывной случайной величины .....
17. Операции над событиями .....	49. Равномерное распределение .....
18. Формула сложения вероятностей .....	50. Показательное распределение .....
19. Условная вероятность случайного события и правило умножения вероятностей .....	51. Нормальное распределение .....
20. Дерево случайного эксперимента и формула полной вероятности .....	52. Использование нормального распределения для описания случайной изменчивости и центральная предельная теорема .....
21. Независимые события .....	<b>Глава XII. Распределение Пуассона</b> .....
<b>Глава IV. Элементы комбинаторики</b> .....	53. Случайная последовательность (поток) независимых событий .....
22. Комбинаторное правило умножения. Перестановки и факториал числа .....	<b>Глава XIII. Измерение линейной связи между случайными величинами</b> .....
23. Число сочетаний и треугольник Паскаля .....	54*. Совместное наблюдение двух величин и ковариация .....
24. Формула бинома Ньютона .....	55*. Свойства ковариации .....
<b>Глава V. Серии последовательных испытаний</b> .....	56*. Коэффициент корреляции случайных величин .....
25. Испытания. Серия испытаний до первого успеха .....	57*. Ковариация и коэффициент корреляции в статистике .....
26. Серия независимых испытаний Бернулли .....	58*. Различие между статистической и причинно-следственной связью .....
27. Случайный выбор из конечной совокупности .....	59*. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов .....
<b>Глава VI. Случайные величины и распределения</b> .....	<b>Глава XIV. Простое случайное блуждание</b> .....
28. Случайная величина и распределение вероятностей .....	60*. Простое одномерное случайное блуждание .....
29. Операции над случайными величинами .....	61*. Переходы в простом одномерном блуждании .....
30. Геометрическое распределение и биномиальное распределение .....	<b>Ответы</b> .....
<b>Глава VII. Математическое ожидание</b> .....	<b>Предметный указатель</b> .....
31. Математическое ожидание дискретной случайной величины .....	
32. Совместное распределение двух случайных величин .....	

Математическая вертикаль : 10-11-е классы : углублённый уровень : учебник по вероятности и статистике для физико-математических классов. И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко ; под ред. И. В. Яценко. АО «Издательство «Просвещение»

№ ФПУ 2.1.3.4.1.2.1.  
№ строки 1331(3<sup>1</sup>)

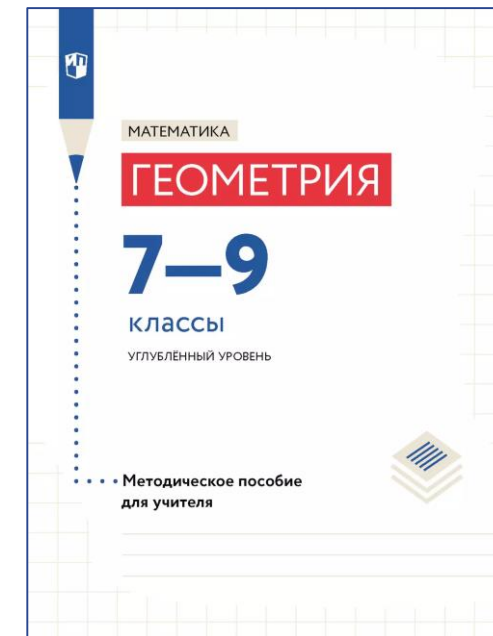
# АЛГЕБРА 7 - 9. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ



<https://go.prosv.ru/t47eME>



# ГЕОМЕТРИЯ 7 - 9. УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ



<https://go.prosv.ru/6adc4a>





<https://go.prosv.ru/bPWbYF>



<https://go.prosv.ru/fMwqry>



## УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ К УМК ВИЛЕНКИНА Н.Я. ПО МАТЕМАТИКЕ

### 2. Цифры и числа

#### Упражнения по теме

- 1) Какие цифры могут стоять в высшем разряде записи натурального числа?
- 2) Какие классы содержатся в записи числа 50 678 199? Прочитайте данное число. Прочитайте число, следующее за данным в натуральном ряду.
- 3) Что означает цифра 5 в записи каждого из следующих чисел: 45, 523, 57 050?
- 2) 1) Сколько миллионов содержится в одном миллиарде?
- 2) Прочитайте число 17 357 924 600. Прочитайте число, предшествующее данному в натуральном ряду.
- 3) Существуют ли натуральные числа, большие 999 миллиардов?

#### Упражнения для повторения

- 7) 1) Задумайте два однозначных числа, запись сумм которых оканчивается цифрой 0. Назовите такие пары чисел.
- 2) Задумайте два однозначных числа, запись сумм которых оканчивается цифрой 4. Назовите такие пары чисел. Придумайте задание, подобное данному.
8. Приём вычисления «по частям».
  - 1) Вычислим сумму  $36 + 7$ . Представим число 7 в виде суммы двух чисел 4 и 3, первое из которых — дополнение числа 36 до круглого 40. Теперь будем складывать по частям:
 
$$36 + (4 + 3) = 40 + 3 = 43.$$
 Вычислите устно:
 
$$27 + 8 = \dots$$

$$48 + 6 = \dots$$

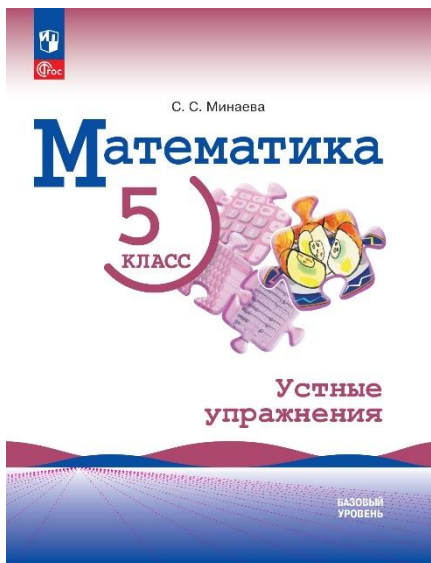
$$56 + 7 = \dots$$



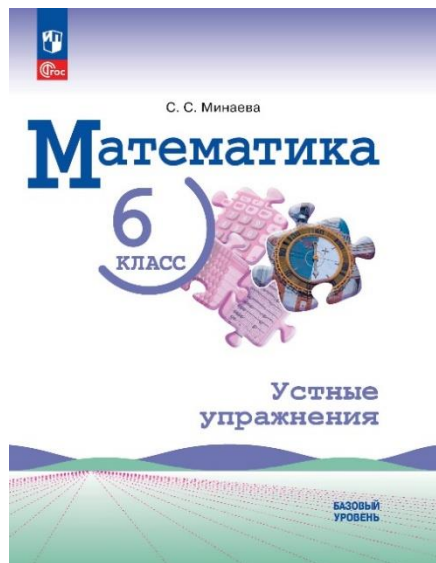
БЕСПЛАТНАЯ МЕТОДИЧКА →

## Оглавление

§ 1. Натуральные числа и нуль. Шкалы	.....
1. Представление числовой информации в таблицах	....
2. Цифры и числа	.....
3. Отрезок и его длина. Ломаная. Многоугольник	.....
4. Плоскость, прямая, луч, угол	.....
5. Шкалы и координатная прямая	.....
6. Сравнение натуральных чисел	.....
7. Представление числовой информации в столбчатых диаграммах	.....
Применяем математику. Задачи на логику перебора	...
§ 2. Сложение и вычитание натуральных чисел	.....
8. Действие сложения. Свойства сложения	.....
9. Действие вычитания. Свойства вычитания	.....
10. Числовые и буквенные выражения	.....
11. Уравнение	.....
Применяем математику. Решение задач приёмом уравнивания	.....
§ 3. Умножение и деление натуральных чисел	.....
12. Действие умножения. Свойства умножения	.....
13. Действие деления	.....
14. Деления с остатком	.....
15. Упрощение выражений	.....
16. Порядок действий в вычислениях	.....
17. Степень с натуральным показателем	.....
18. Делители и кратные	.....
19. Свойства и признаки делимости	.....
Применяем математику. Решение задач приёмом деления на равные части	.....
§ 4. Площади и объёмы	.....
20. Формулы	.....
21. Площадь. Формула площади прямоугольника	.....
22. Единицы измерения площадей	.....
23. Прямоугольный параллелепипед	.....
24. Объёмы. Объём прямоугольного параллелепипеда	..
Применяем математику. Решение задач на движение	..

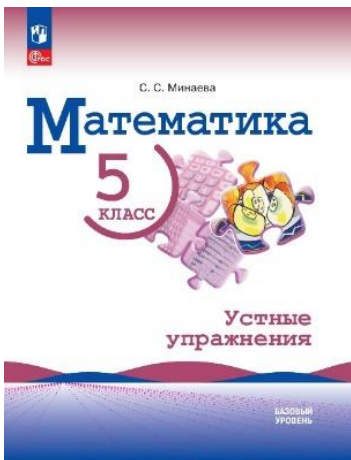


С. С. Минаева.  
Математика. 5  
класс. Базовый  
уровень. Устные  
упражнения



С. С. Минаева.  
Математика. 6  
класс. Базовый  
уровень. Устные  
упражнения

## УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ К УМК ВИЛЕНКИНА Н.Я. ПО МАТЕМАТИКЕ



### ■ Применяем математику.

#### Решение задач делением с остатком

1. Моток длиной 50 м надо разрезать на куски по 3 м каждый. Сколько таких кусков получится?
2. В многоэтажном доме один подъезд, на каждом этаже 6 квартир. На каком этаже квартира с номером 56?
3. Лекарство, которое прописано больному, выпускается в упаковке по 16 таблеток. Ежедневный приём: по 2 таблетки 3 раза в день. Какое наименьшее количество упаковок потребуется на курс 14 дней?
4. В киоске по продаже воздушных шаров рекламная акция: при покупке трёх шаров четвёртый дают в подарок. Шар стоит 80 р. Какое наибольшее число шаров приобретёт покупатель за 500 р?

### ■ Применяем математику.

#### Решение задач прикидкой результата

Напомним, что прикидка в решении задач — это быстрая оценка результата решения. Она применяется в реальных ситуациях, если позволительно решение без точных вычислений, а также для проверки сложных расчётов.

1. Можно ли указанный товар унести в пакете, выдерживающем не более 1 кг:
  - 1) 4 пирожка, если масса одного пирожка 160 г;
  - 2) 3 батона, если масса одного батона 390 г;
  - 3) 5 булочек, если масса одной булочки 170 г?
2. Хватит ли 1000 р. для покупки трёх пакетов конфет по цене 185 р. и трёх пачек печенья по цене 98 р.?
3. Для участия в праздничном фестивале пять школ прислали заявки на следующее число участников: 95, 108, 49, 52 и 89. Сколько примерно сотен человек планируют принять участие в фестивале?

### ■ Вопросы и задачи для итогового повторения

10. Сравните числа:

- а)  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{2}{3}$ ;      в)  $\frac{4}{5}$  и  $\frac{5}{6}$ ;      д) 3 и  $\frac{17}{6}$ ;  
 б)  $\frac{7}{8}$  и  $\frac{1}{2}$ ;      г)  $\frac{3}{10}$  и  $\frac{1}{2}$ ;      е) 4 и  $\frac{11}{3}$ .

11. 1) Какая из обыкновенных дробей больше двух:

- а)  $\frac{12}{12}$ ;      б)  $\frac{7}{3}$ ;      в)  $\frac{4}{7}$ ;      г)  $\frac{4}{3}$ ?

2) Назовите в порядке убывания числа:  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{7}$ ;  $\frac{4}{7}$ .

#### Текстовые задачи

18. Варежки дешевле шарфа на 100 р. Варежки вместе с шарфом стоят 1400 р. Сколько стоят варежки? Сколько стоит шарф?

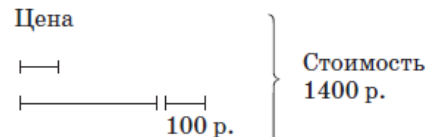


Рис. 72

#### Наглядная геометрия

31. Выберите все записи, которые выражают длину данного отрезка (рис. 78).

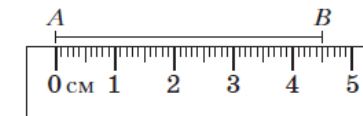


Рис. 78

- 1) 4,5 см;      3)  $4\frac{1}{2}$  см;      5)  $4\frac{1}{5}$  см;  
 2) 45 мм;      4) 45 см;      6) 4,2 см.

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ



**Е. Н. Бурмистрова. Быстро и эффективно. Типовые задания по математике. 5 класс. Базовый уровень. Тетрадь-тренажёр. Учебное пособие. В 2 частях**



<https://go.prosv.ru/ao7apG>

### СОДЕРЖАНИЕ

<b>§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, НУЛЬ. КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ</b> . . . . .	3
1. Цифры и числа . . . . .	3
2. Отрезок, прямая, луч, угол, ломаная, многоугольник . . . . .	5
3. Шкалы и координатная прямая . . . . .	8
4. Сравнение натуральных чисел . . . . .	9
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	11
<b>§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ</b> . . . . .	13
5. Действие сложения и его свойства . . . . .	13
6. Действие вычитания и его свойства . . . . .	15
7. Решение задач на сложение и вычитание . . . . .	18
8. Числовые и буквенные выражения . . . . .	22
9. Уравнение . . . . .	23
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	25
<b>§ 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ</b> . . . . .	27
10. Действие умножения и его свойства . . . . .	27
11. Действие деления и его свойства . . . . .	29
12. Решение задач на умножение и деление . . . . .	31
13. Деление с остатком . . . . .	36
14. Упрощение выражений . . . . .	37
15. Решение задач на движение . . . . .	39
16. Порядок действий в вычислениях . . . . .	42
17. Степень с натуральным показателем . . . . .	45
18. Делители и кратные . . . . .	45
19. Решение задач на делимость чисел . . . . .	46
20. Свойства и признаки делимости . . . . .	48
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	50
<b>§ 4. ПЛОЩАДИ И ОБЪЁМЫ</b> . . . . .	53
21. Формулы . . . . .	53
22. Площадь. Формула площади прямоугольника . . . . .	54
23. Единицы измерения площадей . . . . .	57
24. Прямоугольный параллелепипед . . . . .	60
25. Объёмы. Объём прямоугольного параллелепипеда . . . . .	63
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	66
<b>СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ</b> . . . . .	68
<b>ОТВЕТЫ</b> . . . . .	72

### СОДЕРЖАНИЕ

<b>§ 5. ДРОБНЫЕ ЧИСЛА</b> . . . . .	3
26. Окружность, круг, шар, цилиндр . . . . .	3
27. Доли и дроби. Изображение дробей на координатной прямой . . . . .	5
28. Решение задач на доли и дроби . . . . .	6
29. Сравнение дробей . . . . .	7
30. Правильные и неправильные дроби . . . . .	8
31. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями . . . . .	10
32. Деление натуральных чисел и дроби . . . . .	12
33. Смешанные числа . . . . .	13
34. Сложение и вычитание смешанных чисел с одинаковыми знаменателями . . . . .	16
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	18
<b>§ 6. ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ</b> . . . . .	21
35. Основное свойство дроби . . . . .	21
36. Сокращение дробей . . . . .	22
37. Приведение дробей к общему знаменателю . . . . .	24
38. Сравнение, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями . . . . .	25
39. Умножение дробей . . . . .	29
40. Решение задач на нахождение части целого . . . . .	31
41. Деление дробей . . . . .	32
42. Решение задач на совместную работу . . . . .	35
43. Решение задач на нахождение целого по его части . . . . .	36
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	38
<b>§ 7. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ</b> . . . . .	42
44. Десятичная запись дробей . . . . .	42
45. Сравнение десятичных дробей . . . . .	44
46. Сложение и вычитание десятичных дробей . . . . .	46
47. Округление чисел. Прикидка . . . . .	48
48. Умножение десятичных дробей на натуральное число . . . . .	49
49. Деление десятичных дробей на натуральное число . . . . .	52
50. Умножение на десятичную дробь . . . . .	55
51. Деление на десятичную дробь . . . . .	58
52. Решение задач . . . . .	62
53. Виды углов. Чертёжный треугольник . . . . .	64
54. Измерение углов. Транспортир . . . . .	66
<b>Проверьте себя</b> . . . . .	69
<b>СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ</b> . . . . .	72
<b>ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ</b> . . . . .	77
Тематические тесты . . . . .	77
Контрольная работа . . . . .	81
<b>ОТВЕТЫ</b> . . . . .	85



<https://go.prosv.ru/ao7apG>

## 16. Порядок действий в вычислениях

135. *Повторяем теорию.* Заполните пропуски.
- а) Действия первой ступени — \_\_\_\_\_
- б) Действия второй ступени — \_\_\_\_\_
- в) Если выражение содержит только действия одной \_\_\_\_\_ и в нём нет скобок, то их выполняют \_\_\_\_\_
- г) Если в выражении нет скобок, то сначала выполняют действия \_\_\_\_\_, а потом — \_\_\_\_\_
- д) Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия \_\_\_\_\_

136. Правильно ли выполнены вычисления? Если неправильно, то запишите правильное решение.

а)  $23 - 5 \cdot 4 = 18 \cdot 4 = 72$  \_\_\_\_\_

б)  $9 \cdot 27 - 15 \cdot 9 - 9 \cdot 6 = 9 \cdot (27 - 15 - 6) = 34$  \_\_\_\_\_

137. Расставьте порядок действий и вычислите.

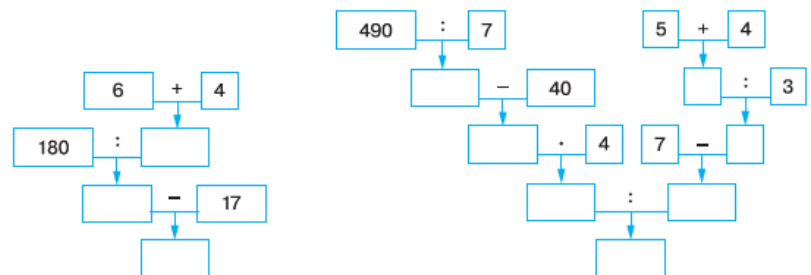
*Образец.*  $44 : 4 - 7 = 11 - 7 = 4$

а)  $84 : 2 + 7 \cdot 6 =$  \_\_\_\_\_      б)  $16 + 32 : 8 - 4 \cdot 5 =$  \_\_\_\_\_

в)  $(13 - 8) \cdot (37 + 3) =$  \_\_\_\_\_      г)  $82 : (26 + 15) =$  \_\_\_\_\_

д)  $33 - 3 \cdot (12 - 5) =$  \_\_\_\_\_      е)  $90 + (15 - 40 : 8) =$  \_\_\_\_\_

138. Выполните действия по схеме и запишите полученное равенство.



171. Найдите ошибку в примере и запишите правильное решение.

а)		б)		в)	
	3,5 4		0,1 4 8		3 6,1 8 4 2 6
	3 2 8,7 5		8 0,1 7 5		3 6 1 8 6,3 7
	- 3 0		- 6 0		- 1 8
	- 2 8		- 5 6		- 1 8
	- 2 0		- 4 0		- 4 2
	- 2 0		- 4 0		- 4 2
	0		0		0
	3,5 4		0,1 4 8		3 6,1 8 4 2 6

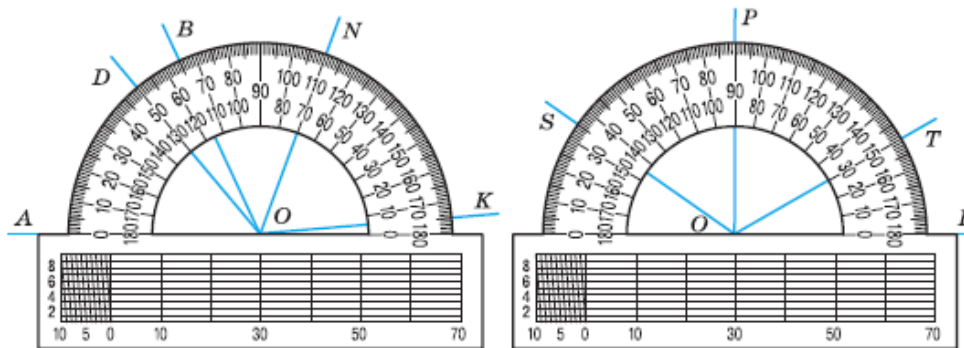
172. Выполните деление.

а)		б)		в)	
	1,2 8 4		3 0,2 4		9 3,2 1 6
	0 0,3 2				
	- 1 2				
	- 1 2				
	8				
	8				
	0				
г)		д)		е)	
	0,1 0 0 1 1 4 3		2,8 4 2 1 4		0,0 2 3 7 4



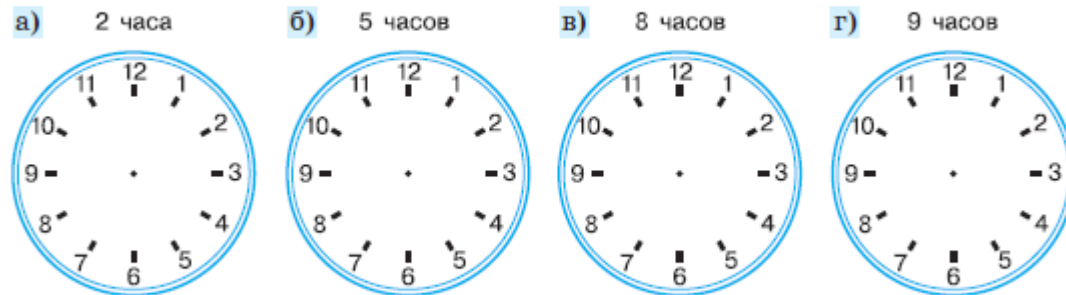
<https://go.prosv.ru/ao7apG>

Определите по рисунку градусные меры углов.



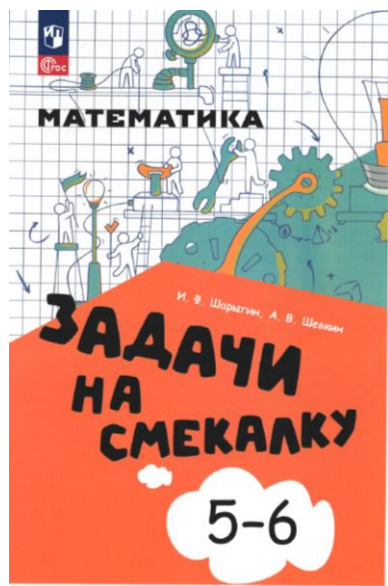
$\angle AOD = \underline{\hspace{2cm}}$      $\angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}$      $\angle ROT = \underline{\hspace{2cm}}$      $\angle ROP = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $\angle AON = \underline{\hspace{2cm}}$      $\angle AOK = \underline{\hspace{2cm}}$      $\angle ROS = \underline{\hspace{2cm}}$

Нарисуйте на циферблате часов стрелки так, чтобы часы показывали указанное время. Найдите меньший угол между стрелками часов.



## СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

1. а) Числа, применяющиеся для счёта предметов, называют натуральными числами. Последовательность всех натуральных чисел называют натуральным рядом. Первое число натурального ряда — единица.  
 б) Среди натуральных чисел есть наименьшее натуральное число — это число единица, но нет наибольшего.  
 в) Натуральные числа записывают специальными знаками — цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Такую запись чисел называют системой счисления или нумерацией.  
 г) Систему счисления, в которой при записи чисел важно, на каком месте (позиции) стоит цифра, называют позиционной.  
 д) Натуральные числа, записанные одной цифрой, называют однозначными, остальные числа называют многозначными.  
 е) При чтении многозначных чисел их разбивают справа налево на классы (группы), по три цифры в каждом. Первые четыре класса справа называют так: первый — классом единиц, второй — классом тысяч, третий — классом миллионов, четвёртый — классом миллиардов.  
 ж) Каждый класс состоит из следующих разрядов: единицы, десятки, сотни.  
 9. 1), 3), 4), 5), 6), 8).  
 27. а) Из двух натуральных чисел меньшее то, которое при счёте называют раньше, а большее то, которое называют позже.  
 б) На координатной прямой точка с большей координатой лежит правее точки с меньшей координатой.  
 в) Сравнение чисел записывают с помощью знаков > (больше), < (меньше).  
 г) Записи вида  $12 > 7$  и  $49 < 52$  называют неравенством.  
 д) Запись вида  $7 < 11 < 40$  называют двойным неравенством.  
 37. а) В равенстве  $7 + 8 = 15$  числа 7 и 8 называют слагаемыми, число 15 и выражение  $7 + 8$  — суммой.  
 б) От перестановки слагаемых сумма не меняется. Это — переместительное свойство сложения.  
 в) Чтобы к числу прибавить сумму двух чисел, можно сначала прибавить первое слагаемое, а потом к полученной сумме — второе слагаемое. Это — сочетательное свойство сложения.  
 г) Число при сложении с нулём не меняется.  
 д) Скобки при сложении можно не писать.  
 е) При сложении натуральных чисел столбиком одно число подписывают под другим так, чтобы цифры одинаковых разрядов были подписаны друг под другом. Сложение начинают с разряда единиц.  
 47. а) В равенстве  $15 - 8 = 7$  число 15 называют уменьшаемым, число 8 — вычитаемым, число 7 и выражение  $15 - 8$  — разностью.  
 б) Чтобы найти, на сколько одно число больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.  
 в) Чтобы вычесть сумму из числа, сначала можно вычесть из этого числа одно слагаемое, а потом из полученной разности — другое слагаемое. Это — свойство вычитания суммы из числа.  
 г) Чтобы из суммы вычесть число, можно вычесть это число из любого слагаемого, а к полученной разности прибавить другое слагаемое. Это — свойство вычитания числа из суммы.  
 д) При вычитании нуля число не изменится.  
 е) При вычитании равных чисел получится нуль.



И. Ф. Шарыгин,  
А. В. Шевкин.  
Математика.  
Задачи на смекалку.  
5-6 классы



Э. Ю. Красс,  
Г. Г. Левитас.  
Математика.  
Поразительные задачи



А. В. Спивак.  
Тысяча и одна  
задача по  
математике.  
5—7 классы



М. В. Ткачева.  
Нескучные  
математические  
рассказы





Э. Ю. Красс,  
Г. Г. Левитас.  
Математика.  
Поразительные  
задачи



Каких только сборников задач не бывает. Сборники нестандартных, увлекательных, занимательных, интересных, старинных и даже легендарных задач. Таковы книги Я. И. Перельмана «Живая математика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия» и другие. Такова книга Б. А. Кордемского «Математическая смекалка».

В этой книге мы собрали задачи, поразившие нас либо своим условием, либо своим решением, либо и тем и другим.

В книге четыре части. В первой помещены те задачи, понимание которых не зависит от имеющихся у читателя математических знаний. Эти задачи требуют только сообразительности решающего. Мы не думаем, что все задачи этой части легки для каждого. Но они не требуют никаких воспоминаний о формулах и теоремах школьного курса. Только логика.

Для решения задач второй части потребуется знание курса математики в объёме девятилетки.

А для решения задач третьей части нужно знание всего курса школьной математики.

В четвёртой части даны ответы.

Мы выражаем благодарность за большую помощь в создании нашей книги Елене Бабкеновне Арутюнян, Елене Анатольевне Ивановой и Виктору Гавриловичу Кротову.

*Авторы*

- 1.19. ● Больной должен принять утром и вечером по одной таблетке двух разных лекарств. На вид все четыре таблетки выглядят одинаково. Больной боится перепутать эти таблетки. Как он должен поступить, чтобы выполнить предписание врача?

- 1.19. Предложим больному взять два блюдечка. На одном написать маркером «утро», на другом — «вечер» и каждую из четырёх таблеток разломать пополам, кладя половинки на разные блюдечки. Тогда и окажется на каждом блюдечке то, что нужно.

Суть решения в том, что больного не должно интересовать, как выглядят таблетки, а должно интересовать содержимое каждой порции (утренней и вечерней) принимаемых лекарств. И добиться нужно всего лишь одного: правильного распределения данных лекарств на две равные порции.



**Э. Ю. Красс,  
Г. Г. Левитас.  
Математика.  
Поразительные  
задачи**



Каких только сборников задач не бывает. Сборники нестандартных, увлекательных, занимательных, интересных, старинных и даже легендарных задач. Таковы книги Я. И. Перельмана «Живая математика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия» и другие. Такова книга Б. А. Кордемского «Математическая смекалка».

В этой книге мы собрали задачи, поразившие нас либо своим условием, либо своим решением, либо и тем и другим.

В книге четыре части. В первой помещены те задачи, понимание которых не зависит от имеющихся у читателя математических знаний. Эти задачи требуют только сообразительности решающего. Мы не думаем, что все задачи этой части легки для каждого. Но они не требуют никаких воспоминаний о формулах и теоремах школьного курса. Только логика.

Для решения задач второй части потребуется знание курса математики в объёме девятилетки.

А для решения задач третьей части нужно знание всего курса школьной математики.

В четвёртой части даны ответы.

Мы выражаем благодарность за большую помощь в создании нашей книги Елене Бабкеновне Арутюнян, Елене Анатольевне Ивановой и Виктору Гавриловичу Кротову.

*Авторы*

2.27. ■ Трудно поверить, что верно следующее утверждение.

Верёвкой обтянули экватор Земли, а затем удлинили эту верёвку на 1 м. Пусть теперь она равномерно отстаёт от экватора. Докажите, что по поверхности под этой верёвкой пробежит мышь.

2.27. На первый взгляд, такое невозможно: ну что такое 1 м по сравнению с длиной земного экватора. Однако будем вычислять. Пусть радиус Земли равен  $R$  м. Тогда длина экватора равна  $2\pi R$  м. Верёвку удлинили на 1 м, значит, её длина стала равной  $(2\pi R + 1)$  м. Вычислим радиус окружности, образуемой этой верёвкой. Он равен  $\frac{2\pi R + 1}{2\pi} = R + \frac{1}{2\pi}$ . Как видим, верёвка отстаёт от экватора на  $\frac{1}{2\pi}$  м. Так как  $\pi \approx 3,14$ , то расстояние от поверхности земли до верёвки будет почти 16 см.

Ответ. Действительно, под такой верёвкой пробежит не только мышь, но и охотящийся за ней кот. Самое поразительное, что это не зависит от длины экватора!



**Э. Ю. Красс,  
Г. Г. Левитас.  
Математика.  
Поразительные  
задачи**



Каких только сборников задач не бывает. Сборники нестандартных, увлекательных, занимательных, интересных, старинных и даже легендарных задач. Таковы книги Я. И. Перельмана «Живая математика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия» и другие. Такова книга Б. А. Кордемского «Математическая смекалка».

В этой книге мы собрали задачи, поразившие нас либо своим условием, либо своим решением, либо и тем и другим.

В книге четыре части. В первой помещены те задачи, понимание которых не зависит от имеющихся у читателя математических знаний. Эти задачи требуют только сообразительности решающего. Мы не думаем, что все задачи этой части легки для каждого. Но они не требуют никаких воспоминаний о формулах и теоремах школьного курса. Только логика.

Для решения задач второй части потребуется знание курса математики в объёме девятилетки.

А для решения задач третьей части нужно знание всего курса школьной математики.

В четвёртой части даны ответы.

Мы выражаем благодарность за большую помощь в создании нашей книги Елене Бабкеновне Арутюнян, Елене Анатольевне Ивановой и Виктору Гавриловичу Кротову.

*Авторы*

3.1. К Маше на день рождения придут гости. Она решила купить 10 пирожных, чтобы чаепитие прошло на славу. В магазине оказались пирожные четырёх видов: эклеры, корзиночки, наполеоны и бисквиты. Ещё в магазине оказались три рулета. Сколькими способами Маша может осуществить задуманную покупку, если рулеты она решила купить все три?

3.1. У нас спрашивают, сколькими способами можно набрать 10 пирожных из пирожных четырёх сортов. Предлагаем такое поразительное решение. Соорудим коробку для будущей покупки. Пусть это будет длинная коробка с 13 углублениями для всех 13 пирожных, включая рулеты. А чтобы определить, сколько именно в ней будет пирожных каждого из четырёх сортов, расположим три рулета как разделители между сортами. Если теперь договориться располагать остальные виды по алфавиту (бисквиты — корзиночки — наполеоны — эклеры), то получится, что положение рулетов в такой коробке будет однозначно определять количество покупаемых пирожных каждого сорта. На рисунке 4.51 представлены два примера такого расположения.



2 бисквита, 3 «картошки», 4 наполеона, 1 эклер



3 «картошки», 7 эклеров

Рис. 4.51

Задача свелась к выяснению того, сколькими способами можно выбрать три места из тринадцати для помещения в них трёх рулетов. А это, как известно, вычисляется по формуле числа сочетаний из 13 по 3:

$$C_{13}^3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286.$$

Ответ. 286 способов.

Помогает ребёнку научиться выполнять домашнее задание самостоятельно

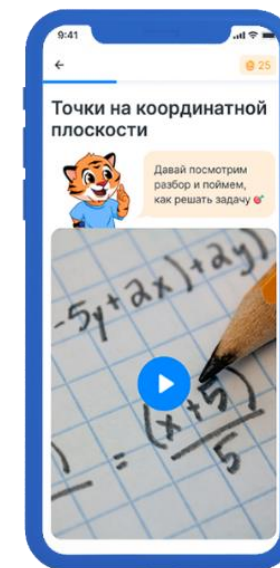
➤ Не готовые решения, а разборы домашних заданий

➤ Решения аналогичных заданий на отработку и закрепление

➤ Повторение правил и фрагменты теории к заданиям

➤ Результаты выполнения всех упражнений с рекомендацией, что необходимо проработать

➤ Специально разработанная система мотивации ученика через игру



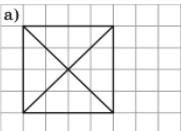

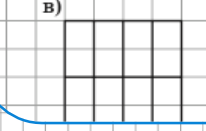
QR-код на разбор

**26. Доли и дроби. Изменение дроби**

Дроби – штука полезная. Главное разобраться, как они работают. Поможешь?

1. Закрасьте:

а) одну четвертую долю квадрата;  
б) две третьих доли круга;  
в) пять восьмых долей прямоугольника.

а)  б)  в) 

2. Запишите в виде обыкновенной дроби:

а) одну шестнадцатую — \_\_\_; в) восемь восьмых — \_\_\_;  
б) две пятых — \_\_\_; г) сто тридцать первых — \_\_\_.

49



<https://go.prosv.ru/KkdpEJ>

<https://go.prosv.ru/cd9omF>

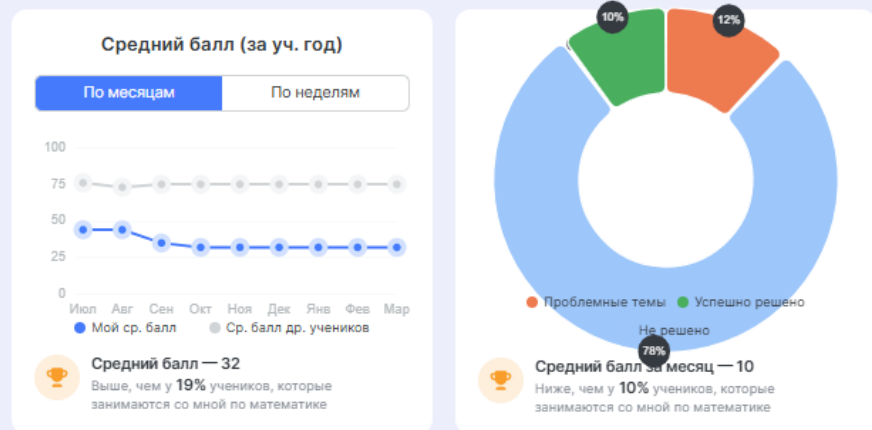
С ПОМОЩЬЮ РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ

ВЫЗЫВАЕМ РЕПЕТИГРА

ЧЕРЕЗ СТРАНИЦУ НА САЙТЕ



## РепеТИГР по математике. 5 класс



!! Проблемные темы | Не решено | Успешно решено

Супер-р-р! Слежу за твоими успехами! Давай потренируемся ещё?

Глава 5. Обыкновенные дроби

§25. Окружность, круг, шар, цилиндр 100 / Освоение темы 20%	§36. Сравнение, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями 78 / Освоение темы 67%
§37. Умножение дробей 100 / Освоение темы 25%	§39. Деление дробей 95 / Освоение темы 67%
§40. Нахождение целого по его части 66 / Освоение темы 60%	

## Мои результаты

РепеТИГР по английскому языку. 5 класс 30 средний балл	РепеТИГР по русскому языку. 5 класс 100 средний балл	РепеТИГР по математике. 5 класс 32 средний балл
РепеТИГР по всеобщей истории. 5 класс 20 средний балл	РепеТИГР по математике. 6 класс 100 средний балл	



<https://go.prosv.ru/KkdpEJ>

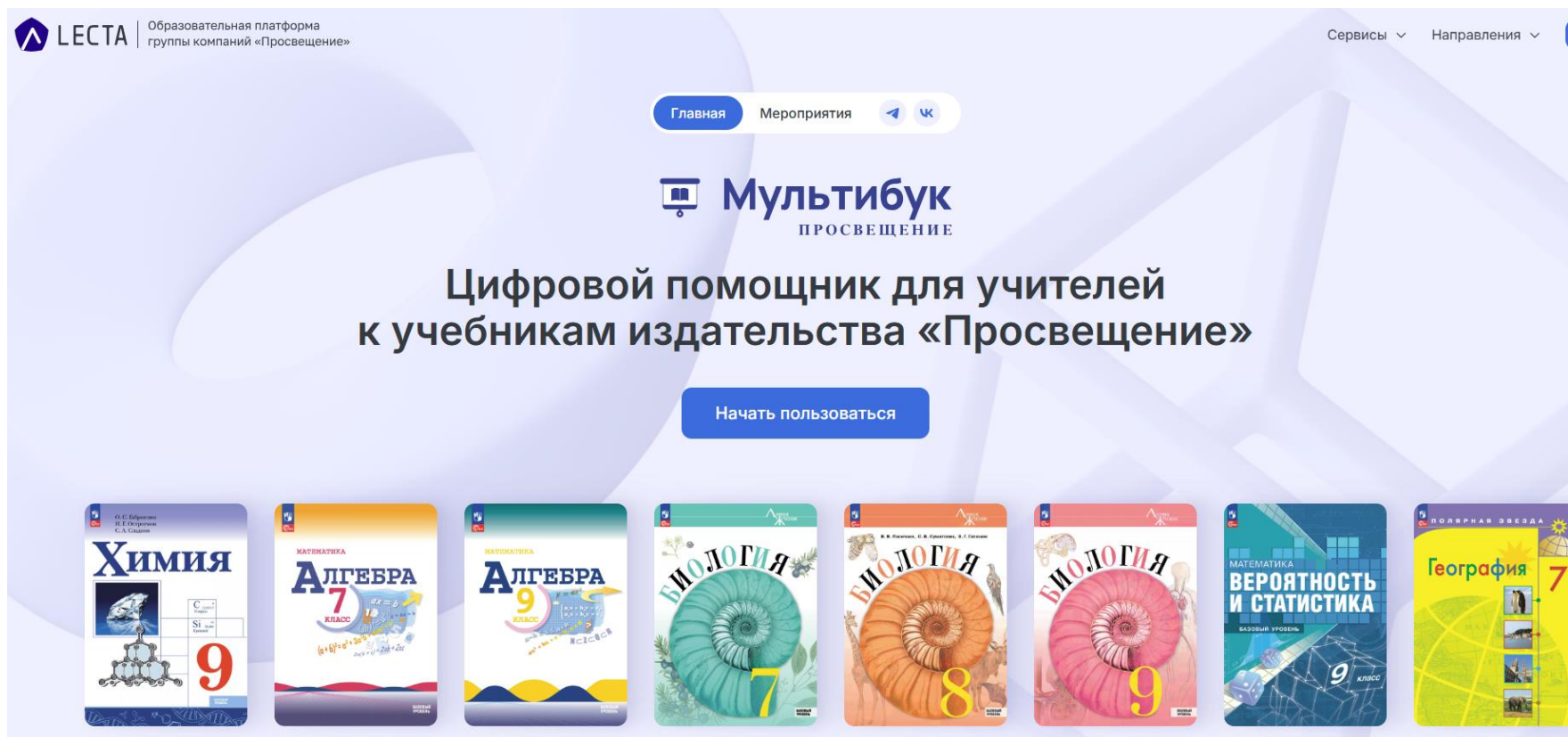
С ПОМОЩЬЮ РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ



<https://go.prosv.ru/cd9omF>



ЧЕРЕЗ СТРАНИЦУ НА САЙТЕ



LECTA | Образовательная платформа группы компаний «Просвещение»

Сервисы ▾ Направления ▾

Главная Мероприятия

**Мультибук**  
ПРОСВЕЩЕНИЕ

Цифровой помощник для учителей  
к учебникам издательства «Просвещение»

Начать пользоваться

Химия 9

МАТЕМАТИКА  
АЛГЕБРА 7 КЛАСС

МАТЕМАТИКА  
АЛГЕБРА 9 КЛАСС

БИОЛОГИЯ 7

БИОЛОГИЯ 8

БИОЛОГИЯ 9

МАТЕМАТИКА  
ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА 9 КЛАСС

ПОЛЯРНАЯ ЗВЕЗДА  
География 7



<https://go.prosv.ru/jdF4E4>



- Алгебра 7
- Алгебра 9

- Геометрия 9
- Вероятность и статистика 9



<https://go.prosv.ru/A3CGMD>



УЧИТЕЛЬ. CLUB

МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОМОЩЬ ▾

ВЕБИНАРЫ ↵

УЧИМСЯ ДЛЯ ЖИЗНИ ▾



Войти



Главная > Цифровые сервисы «Просвещения» в ЦОК «Моя школа» — для учителей

## Цифровые продукты Издательства «Просвещение» в Библиотеке ЦОК «Моя школа»

Назначайте учебные материалы Издательства «Просвещение». Они **в свободном доступе** для вас и ваших учеников

Начать использовать ↗



<https://go.prosv.ru/7Y7pej>

## ВИДЕОИНСТРУКЦИЯ



<https://go.prosv.ru/ELXD4k>



The screenshot shows the website interface for the 'Универсальная библиотека цифрового образовательного контента' (Universal library of digital educational content). The header includes the 'госуслуги' logo and navigation links for 'Услуги', 'Профиль организации', 'Заявления', 'Платежи', and 'Помощь'. The main content area features a 'НАЧИНАЙЗЕР' (Getting Started) section for grades 1-4, a 'Мультибук' (Multibook) section with digital textbooks for 'БИОЛОГИЯ' (Biology) and 'ФИЗИКА' (Physics) for grade 9, and a 'ЦИФРОВАЯ РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ' (Digital Working Notebook) for 'Математика' (Mathematics) for grade 5. A 'РепеТИГР' (Repeat Tiger) section is also visible for Russian language in grade 5. The Prosveshchenie logo is at the bottom right.

## МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 5 – 11 КЛАССЫ



<https://go.prosv.ru/99jefe>



**Подробнее**

Общие вопросы

Методическая поддержка  
и обучение педагогов



[prosv@prosv.ru](mailto:prosv@prosv.ru)

<https://prosv.ru/help/>